Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
w Lublinie
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

Anna Futa

Nierówności typu Schwarza dla odwzorowań harmonicznych koła jednostkowego unormowanych na brzegu

Praca doktorska
napisana pod kierunkiem
dr hab. Dariusza Partyki, prof. KUL

Lublin 2022

Pragnę wyrazić głęboką wdzięczność
Panu dr hab. Dariuszowi Partyce, prof. KUL
za nieocenioną pomoc udzieloną w trakcie
przygotowywania rozprawy doktorskiej.
Dziękuję za cierpliwość, wyrozumiałość i inspirację
do zgłębiania tajników analizy zespolonej.

Spis treści

Wstęp

Niech Ω będzie obszarem w płaszczyźnie zespolonej $\mathrm{E}(\mathbb{C}) := (\mathbb{C}, \rho_e)$, gdzie ρ_e jest standardową metryką, o brzegu $\Gamma \neq \emptyset$. Ustalając dowolnie niepusty zbiór $A \subset \Gamma$ i funkcję $f : A \to \mathbb{C}$ można postawić interesujące zagadnienie badania klasy $\mathcal{D}_A(\Omega, f)$ złożonej ze wszystkich funkcji ciągłych $F : \Omega \cup A \to \mathbb{C}$, które pokrywają się z funkcją f na zbiorze A i są harmoniczne w obszarze Ω, tzn. funkcje F są dwukrotnie różniczkowalne w sposób ciągły w obszarze Ω i spełniają w nim równanie różniczkowe Laplace'a (1.1). Oczywiście f musi być funkcją ciągłą, gdy $\mathcal{D}_A(\Omega, f) \neq \emptyset$. W szczególności, jeśli $A = \Gamma$ to zagadnienie badania klasy $\mathcal{D}_\Gamma(\Omega, f)$ jest klasycznym problemem Dirichleta dla obszaru Ω z funkcją brzegową $f : \Gamma \to \mathbb{C}$. Jeśli dodatkowo $\Omega \cup \Gamma$ jest zbiorem zwartym w $\mathrm{E}(\mathbb{C})$, to z uwagi na zasadę maksimum dla zespolonych funkcji harmonicznych, klasa $\mathcal{D}_\Gamma(\Omega, f)$ składa się z dokładnie jednej funkcji. Wtedy problem Dirichleta ma jednoznaczne rozwiązanie, czyli funkcja brzegowa f dostarcza pełnej informacji potrzebnej do odtworzenia jedynej funkcji $F \in \mathcal{D}_\Gamma(\Omega, f)$. W szczególnie prostym przypadku koła jednostkowego $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ jego brzegiem jest okrąg jednostkowy $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ i jedyne rozwiązanie problemu Dirichleta dla $\mathbb{D}$ z ciągłą funkcją brzegową $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ można wyznaczyć za pomocą całki Poissona $F = \mathrm{P}[f]$; por. wzór (1.4). Jeśli $A \neq \Gamma$ to zagadnienie badania klasy $\mathcal{D}_A(\Omega, f)$ można interpretować jako problem Dirichleta dla obszaru Ω z niepełną informacją na brzegu.

Niniejsza rozprawa dotyczy w znacznej mierze wyżej postawionego problemu dla klasy $\mathcal{D}_A(\mathbb{D}, f) \cap \mathcal{A}$, gdzie A jest skończonym podzbiorem okręgu $\mathbb{T}$, $\mathcal{A}$ jest klasą wszystkich bijekcji zbioru $\mathbb{D} \cup A$ na siebie i $f(z) = z$ dla $z \in A$, czyli f jest funkcją identycznościową na A. Osiągnięte wyniki w tym zakresie są przedstawione w rozdziale 4. Ściślej rzecz ujmując, w podrozdziałach 4.1–4.3 zawarte są wyniki dotyczące odpowiednio nierówności typu Schwarza, wariantów nierówności Heinza oraz dolnego szacowania typu Lipschitza dla funkcji z klasy $\mathcal{D}_A(\mathbb{D}, f) \cap \mathcal{A}$ w zależności od parametru rzeczywistego δ charakteryzującego rozkład punktów zbioru A na okręgu $\mathbb{T}$. Są one konsekwencją rezultatów uzyskanych w rozdziale 3.

Problem badania klasy $\mathcal{D}_A(\mathbb{D}, f) \cap \mathcal{A}$ nie jest łatwy. Pionierskie wyniki w tym zakresie zostały otrzymane w pracy [17] dla zbioru $A := \left\{e^{2\pi i k/3} : k \in \{0, 1, 2\}\right\}$, w której

oszacowano moduł $|F(z)|$ dla $F \in \mathcal{D}_A(\mathbb{D}, f) \cap \mathcal{A}$ i $z \in \mathbb{D}$. Użyta metoda polegała na dokładnym oszacowaniu tego modułu w szerszej klasie funkcji harmonicznych $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ spełniających następujący warunek sektorowy: dla każdego $k \in \{1, 2, 3\}$ i dla prawie każdego $u \in T_k := \left\{e^{2\pi i t/3} : t \in [k-1; k]\right\}$ granica radialna funkcji F w punkcie u należy do otoczki wypukłej, rozpiętej przez początek układu współrzędnych i łuk T_k. W pracy [7] rozważany był przypadek ogólniejszy, w którym trzy łuki zastąpiono skończonym ciągiem $T_1, T_2, \ldots, T_n$ łuków domkniętych zawartych w $\mathbb{T}$ o dodatniej długości, całkowitej długości 2π i pokrywających okrąg $\mathbb{T}$. Ciąg ten został nazwany *partycją okręgu* $\mathbb{T}$, zaś odpowiadający tym łukom warunek sektorowy został nazwany *sektorową normalizacją brzegową stowarzyszoną z partycją* $T_1, T_2, \ldots, T_n$ *okręgu* $\mathbb{T}$; por. definicje 1.1 i 1.2 w podrozdziale 1.3. Należy przy tym dodać, że wyniki uzyskane w pracy [7] obowiązują przy domyślnym założeniu, że wszystkie łuki partycji okręgu $\mathbb{T}$ nie przekraczają połowy długości tego okręgu. To obostrzenie jest usunięte w rozprawie, przez co wyniki w niej otrzymane obowiązują dla wszystkich partycji.

Wiodącym zagadnieniem niniejszej rozprawy jest szacowanie modułu funkcji harmonicznych $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ z normalizacją sektorową, co prowadzi do nierówności typu Schwarza (por. podrozdział 1.2) dla klasy takich funkcji. Uzyskane w tym zakresie rezultaty są zawarte w rozdziale 3, a ich dowody są oparte na faktach pomocniczych zebranych w rozdziale 2. Kluczowym narzędziem jest tutaj twierdzenie 2.11 z podrozdziału 2.2, które pozwala uzyskać szacowanie modułu $|F(z)|$ w terminach miar harmonicznych łuków $T_1, T_2, \ldots, T_n$ w punkcie $z \in \mathbb{D}$; por. [7, Theorem 2.3]. Własności miar harmonicznych w zakresie potrzebnym do wykazania wspomnianych wyżej nierówności typu Schwarza są opisane w podrozdziale 2.1. Na szczególną uwagę zasługują tutaj zdefiniowanie punktu mocno ekstremalnego zbioru i wykazanie powiązanego z tym pojęciem lematu 2.8, który uogólnia wynik [17, Lemma 3.1]. Rozważania w rozdziale 3 bazują na twierdzeniu 3.1 wykazanym w podrozdziale 3.1. Jest to wzmocniona wersja twierdzenia [7, Theorem 3.1] poprzez zniesienie wspomnianego wcześniej obostrzenia na partycje okręgu $\mathbb{T}$ oraz dodanie warunków koniecznych i dostatecznych pojawienia się równości w oszacowaniu (3.1). Daje to narzędzie do badania konfiguracji ekstremalnych, co stanowi szczególną wartość twierdzenia 3.1. Podrozdział 3.1 zamyka wniosek 3.3, który wyraża oszacowanie modułu $|F(z)|$ w zależności od liczby n łuków partycji $T_1, T_2, \ldots, T_n$ okręgu $\mathbb{T}$, połowy długości δ jej najkrótszego łuku oraz wartości $p(z)$ najmniejszej miary harmonicznej punktu z względem tych łuków; por. pierwsza nierówność w (3.23). Zastosowanie oszacowania wartości $p(z)$ z wniosku 2.5 prowadzi do drugiej nierówności w (3.23), która daje oszacowanie typu radialnego modułu $|F(z)|$ w zależności od parametrów n, δ i $|z|$. W obu przypadkach użyta jest funkcja ρ_n określona wzorem (3.19). Pozostaje zatem oszacować bądź wyznaczyć wartość

$\rho_n(\delta)$, co jest przedmiotem rozważań pozostałych trzech podrozdziałów rozdziału 3. Podrozdział 3.2 dotyczy przypadku ogólnego podziału okręgu $\mathbb{T}$ na n łuków o dowolnej długości. Oszacowania dla $\rho_n(\delta)$ podaje wniosek 3.10, z którego wyprowadzono oszacowanie (3.51) na moduł $|F(z)|$ w twierdzeniu 3.11. Kolejne dwa podrozdziały 3.3 i 3.4 dotyczą przypadków partycji z trzema i czterema łukami, odpowiednio. I tak w podrozdziale 3.3 wyznaczono wartość $\rho_3(\delta)$ dla $\delta \in (0; \pi/3]$; por. wniosek 3.15. To łącznie z wnioskiem 3.3 doprowadziło do oszacowania (3.56) w twierdzeniu 3.16 modułu $|F(z)|$ w zależności od δ i $|z|$. Co więcej, stosując twierdzenie 3.1 scharakteryzowano wszystkie przypadki ekstremalne, czyli pary (F, z), dla których nierówność w (3.56) staje się równością. W szczególności, jeśli $\delta = \pi/3$ to oszacowanie (3.56) przechodzi w oszacowanie w [17, Corollary 2.2]; por. uwaga 3.18. Z kolei w podrozdziale 3.4 wyznaczono wartość $\rho_4(\delta)$ dla $\delta \in (0; \pi/4]$; por. wniosek 3.20. Stąd wyprowadzono oszacowania typu Schwarza (3.83) i (3.84) w twierdzeniu 3.21, a także scharakteryzowano wszystkie możliwe przypadki ekstremalne.

Jak to już zostało wcześniej wspomniane, rozdział 4 zawiera zastosowania wyników z rozdziału 3 do badania własności funkcji klasy $\mathcal{D}_A(\mathbb{D}, f) \cap \mathcal{A}$, gdzie A jest skończonym podzbiorem okręgu $\mathbb{T}$ i f jest funkcją identycznościową na A. Umożliwia to lemat 4.3, dzięki któremu każda funkcja $F \in \mathcal{D}_A(\mathbb{D}, f) \cap \mathcal{A}$ spełnia warunek normalizacji sektorowej stowarzyszonej z partycją okręgu $\mathbb{T}$, otrzymaną w wyniku łączenia łukami kolejnych punktów zbioru A. W ten sposób w podrozdziale 4.1 zostały przeniesione wyniki z rozdziału 3 na funkcje z klasy $\mathcal{D}_A(\mathbb{D}, f) \cap \mathcal{A}$, z uwzględnieniem w szczególności przypadków, gdy zbiór A składa się z trzech lub czterech punktów. Uzyskane w ten sposób nierówności typu Schwarza dla klasy $\mathcal{D}_A(\mathbb{D}, f) \cap \mathcal{A}$ zostały wykorzystane w podrozdziale 4.2 do dolnego oszacowania modułu pochodnej $|\partial F|$ w kole $\mathbb{D}$ dla $F \in \mathcal{D}_A(\mathbb{D}, f) \cap \mathcal{A}$, z uwzględnieniem w szczególności przypadków, gdy zbiór A składa się z trzech lub czterech punktów. Otrzymane w ten sposób nierówności są wariantami nierówności Heinza; por. [9]. Te z kolei posłużyły do dolnego oszacowania w podrozdziale 4.3 ilorazu $|F(z) - F(w)|/|z - w|$ dla $z, w \in \mathbb{D}$, $z \neq w$, przy dodatkowym założeniu quasikonforemności odwzorowania $F \in \mathcal{D}_A(\mathbb{D}, f) \cap \mathcal{A}$.

Podstawowe pojęcia i oznaczenia używane w rozprawie a także obowiązujące w niej ogólne założenia są opisane w rozdziale 1. W szczególności w podrozdziale 1.1 przypomniano pojęcie funkcji harmonicznej o wartościach zespolonych oraz podstawowe własności całki Poissona w kole jednostkowym. W podrozdziale 1.2 zdefiniowano tytułowe *nierówności typu Schwarza* i wskazano przykłady takich nierówności dla wybranych klas funkcji. Z kolei w podrozdziale 1.3 wprowadzono kluczowe pojęcia: *partycji okręgu* $\mathbb{T}$ oraz *sektorowej normalizacji brzegowej*. Zostały one zaczerpnięte z pracy [17], która była inspiracją do napisania tej rozprawy.

Rozdział 1

Pojęcia wstępne

W tym rozdziale wprowadzamy podstawowe pojęcia i oznaczenia używane w rozprawie a także obowiązujące w niej ogólne założenia. Na początek przypominamy pojęcie funkcji harmonicznej o wartościach zespolonych oraz podstawowe własności całki Poissona w kole jednostkowym. Następnie określamy, czym jest nierówność typu Schwarza oraz wskazujemy wybrane przykłady takich nierówności. Na koniec definiujemy partycje okręgu $\mathbb{T}$, a następnie sektorowe normalizacje brzegowe stowarzyszone z tymi partycjami. Klasy odwzorowań harmonicznych odwzorowujących koło $\mathbb{D}$ w siebie w ten sposób unormowane będą głównym przedmiotem badań.

W dalszym ciągu zakładamy, że wszystkie pojęcia i operacje topologiczne są rozumiane w odniesieniu do rozszerzonej płaszczyzny zespolonej $\mathrm{E}(\hat{\mathbb{C}}) := (\hat{\mathbb{C}}, \rho_{\mathrm{c}})$, gdzie $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zaś ρ_{c} jest metryką cięciwową. Z topologicznego punktu widzenia przestrzeń $\mathrm{E}(\hat{\mathbb{C}})$ jest jednopunktowym uzwarceniem płaszczyzny zespolonej $\mathrm{E}(\mathbb{C})$. Symbolami $\mathrm{cl}(A)$, $\mathrm{fr}(A)$ i $\mathrm{int}(A)$ będziemy oznaczać odpowiednio domknięcie, brzeg i wnętrze zbioru $A \subset \hat{\mathbb{C}}$. Dla dowolnych $a \in \mathbb{C}$ i $r \in \mathbb{R}$ określamy koło $\mathbb{D}(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ i okrąg $\mathbb{T}(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$ o środku w punkcie a i promieniu r. W szczególności $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0, 1)$ i $\mathbb{T} = \mathbb{T}(0, 1)$. Miarę standardową zbioru $A \subset \mathbb{T}$ mierzalnego w sensie Lebesgue'a będziemy oznaczać symbolem $|A|_1$. W szczególności, jeśli A jest łukiem, wówczas $|A|_1$ oznacza jego długość. Dla dowolnych $p, q \in \mathbb{Z}$ definiujemy zbiory $\mathbb{Z}_{p,q} := \{k \in \mathbb{Z} : p \leqslant k \leqslant q\}$ i $\mathbb{Z}_p := \{k \in \mathbb{Z} : p \leqslant k\}$. W szczególności $\mathbb{Z}_1 = \mathbb{N}$.

W całej rozprawie przyjmujemy, że pojęcie *funkcja harmoniczna* jest tożsame z pojęciem *odwzorowanie harmoniczne*.

1.1 Funkcje harmoniczne

Niech $\operatorname{Har}(\Omega)$ oznacza klasę wszystkich funkcji harmonicznych o wartościach zespolonych określonych w zbiorze otwartym $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$, tzn. klasę wszystkich odwzorowań F ciągłych w Ω i dwukrotnie różniczkowalnych w sposób ciągły w $\Omega \setminus \{\infty\}$, spełniających równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(z)}{\partial y^2} = 0, \quad z = x + \mathrm{i}y \in \Omega \setminus \{\infty\}. \tag{1.1}$$

Korzystając z operatorów pochodnych formalnych

$$\partial := \frac{1}{2}(\partial_x - \mathrm{i}\partial_y) \quad \text{oraz} \quad \bar{\partial} := \frac{1}{2}(\partial_x + \mathrm{i}\partial_y) \tag{1.2}$$

można równanie Laplace'a wyrazić w zwięzłej postaci

$$\partial\bar{\partial} F(z) = 0, \quad z \in \Omega \setminus \{\infty\}. \tag{1.3}$$

Niech $\mathrm{P}[f]$ oznacza całkę Poissona z funkcji całkowalnej $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, tj., $\mathrm{P}[f] : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ jest funkcją określoną następującym wzorem

$$\mathrm{P}[f](z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u) \frac{1 - |z|^2}{|u - z|^2} |\mathrm{d}u| = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u) \operatorname{Re} \frac{u + z}{u - z} |\mathrm{d}u|, \ z \in \mathbb{D}. \tag{1.4}$$

Całka Poissona jest jednoznacznym rozwiązaniem problemu Dirichleta w kole jednostkowym $\mathbb{D}$ pod warunkiem, że funkcja brzegowa f jest ciągła. To oznacza, że $\mathrm{P}[f]$ jest funkcją harmoniczną w $\mathbb{D}$, mającą ciągłe rozszerzenie na koło domknięte $\operatorname{cl}(\mathbb{D})$, której wartości na brzegu są równe wartościom funkcji f.

Dla dowolnie zadanej funkcji $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, granicę radialną tej funkcji określamy wzorem

$$\mathbb{T} \ni z \mapsto F^*(z) := \begin{cases} \lim\limits_{r \to 1^-} F(rz), & \text{gdy granica istnieje,} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Ponieważ funkcja harmoniczna i ograniczona w $\mathbb{D}$ o wartościach rzeczywistych ma granicę radialną p.w. w $\mathbb{T}$ (por. [5, Corollary 1, Sec. 1.2]), więc $F^* = (\operatorname{Re} F)^* + \mathrm{i}(\operatorname{Im} F)^*$ p.w. w $\mathbb{T}$ pod warunkiem, że $F \in \operatorname{Har}(\mathbb{D})$ jest funkcją ograniczoną w $\mathbb{D}$. Tu i w dalszym ciągu „p.w." jest skrótem od „prawie wszędzie", badź „prawie wszystkich" w sensie miary Lebesgue'a. Zatem dla każdej funkcji $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, jeśli $F \in \operatorname{Har}(\mathbb{D})$ to ciąg funkcyjny $\mathbb{N} \ni m \mapsto f_m$, gdzie

$$\mathbb{T} \ni u \mapsto f_m(u) := F((1 - \tfrac{1}{m})u), \quad m \in \mathbb{N},$$

jest zbieżny do F^* p.w. w $\mathbb{T}$, skąd na mocy twierdzenia całkowego Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej widzimy, że dla każdego $z \in \mathbb{D}$,

$$F((1 - \tfrac{1}{m})z) = \mathrm{P}[f_m](z) \to \mathrm{P}[F^*](z), \text{ gdy } m \to +\infty.$$

Dlatego

$$F^*(\mathbb{T}) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{D}) \text{ i } F = \mathrm{P}[F^*], \quad F \in \mathrm{Har}(\mathbb{D}) \cap (\mathbb{D} \to \mathbb{D}). \tag{1.5}$$

Jeśli F jest funkcją określoną w otoczeniu punktu $z \in \mathbb{C}$ i różniczkowalną w punkcie z, to Jakobian $\mathrm{J}[F](z)$ funkcji F w punkcie z spełnia równość

$$\mathrm{J}[F](z) = |\partial F(z)|^2 - |\bar{\partial} F(z)|^2.$$

Oznaczmy przez $\mathrm{Hol}(\Omega)$ klasę wszystkich funkcji holomorficznych określonych w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{C}$, tzn. klasę funkcji mających pochodną zespoloną w każdym punkcie zbioru Ω. Wiadomo, że każda funkcja $F \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ spełnia równanie Cauchy'ego-Riemanna $\bar{\partial} F(z) = 0$ dla $z \in \Omega$, i tym samym spełnia ona równanie (1.3). Dlatego $\mathrm{Hol}(\Omega) \subset \mathrm{Har}(\Omega)$. W rozdziale 4 będą rozważane odwzorowania harmoniczne, które są jednocześnie odwzorowaniami quasikonforemnymi. Przypomnijmy, że dla dowolnego obszaru niepustego Ω i dowolnych $F : \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$ i $K \in [1; +\infty)$, F nazywamy *odwzorowaniem K-quasikonforemnym* :⇔ F spełnia następujące warunki:

(i) F jest zachowującym orientację homeomorfizmem obszaru Ω na $F(\Omega)$;

(ii) F ma własność ACL (absolutna ciągłość na liniach) w Ω;

(iii) $|\bar{\partial} F(z)| \leqslant \frac{K-1}{K+1} |\partial F(z)|$ dla p.w. $z \in \Omega \setminus \{\infty, F^{-1}(\infty)\}$;

por. [13, Chap. IV, §2.3], [1, Chap. I, Sec. A]. Odnotujmy, że każde odwzorowanie konforemne $F : \Omega \to \mathbb{C}$, czyli F jest funkcją holomorficzną i różnowartościową, spełnia równanie $\bar{\partial} F = 0$ w Ω, i tym samym F jest odwzorowaniem 1-quasikonforemnym.

1.2 Nierówności typu Schwarza

Rozważmy niepustą klasę funkcji $\mathcal{F} \subset (\mathbb{D} \to \mathbb{D})$. Przez *nierówność typu Schwarza dla klasy $\mathcal{F}$* rozumiemy nierówność postaci

$$|f(z)| \leqslant \lambda(|z|), \quad f \in \mathcal{F}, \ z \in \mathbb{D},$$

gdzie $\lambda : [0; 1] \to [0; 1]$ jest funkcją zależną wyłącznie od klasy $\mathcal{F}$. W szczególności, przy założeniu $f(0) = 0$ dla $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, mamy:

$$[0; 1] \ni t \mapsto \lambda(t) := t$$

dla funkcji holomorficznych (por. [6, Lemma 1, Sec. 4.6]),

$$[0;1] \ni t \mapsto \lambda(t) := \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(t)$$

dla odwzorowań harmonicznych (por. [9, Lemma]) oraz

$$[0;1] \ni t \mapsto \lambda(t) := \Phi_K(t)$$

dla odwzorowań quasikonforemnych (por. [13, Theorem 3.1, Chap. II, §3.1]). Symbol Φ_K oznacza funkcję dystorsji Hersch'a-Pfluger'a określoną dla dowolnego $K > 0$ za pomocą równości

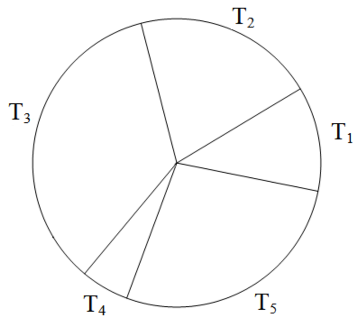
$$\Phi_K(r) := \mu^{-1}(\mu(r)/K), \quad 0 < r < 1; \quad \Phi_K(0) := 0,\ \Phi_K(1) := 1,$$

gdzie μ oznacza moduł obszaru ekstremalnego Grötzsch'a $\mathbb{D} \setminus [0;r]$; por. [10] oraz [13, Chap. II, §1.1, §3.1].

1.3 Sektorowa normalizacja brzegowa

Definicja 1.1. [7] Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, ciąg $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto T_k \subset \mathbb{T}$ nazywamy *partycją okręgu jednostkowego* :⇔ dla każdego $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$, T_k jest łukiem domkniętym o dodatniej długości oraz

$$\bigcup_{k=1}^{n} T_k = \mathbb{T} \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{n} |T_k|_1 = 2\pi. \tag{1.6}$$



Rysunek 1.1: Partycja okręgu jednostkowego dla $n = 5$.

Dla dowolnej funkcji $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ i $z \in \mathbb{T}$ określamy zbiór $F^{**}(z)$ złożony ze wszystkich $w \in \mathbb{C}$ takich, że istnieje ciąg $\mathbb{N} \ni n \mapsto r_n \in [0;1)$ spełniający równości

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to+\infty} F(r_n z) = w.$$

Zbiór $F^{**}(z)$ możemy interpretować jako zbiór wszystkich radialnych punktów skupienia funkcji F w punkcie brzegowym $z \in \mathbb{T}$.

Definicja 1.2. [7] Przez *sektorową normalizację brzegową stowarzyszoną z partycją* $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto T_k \subset \mathbb{T}$ *okręgu jednostkowego* rozumiemy klasę $\mathcal{N}(T_1, T_2, \dots, T_n)$ wszystkich funkcji $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ takich, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$ i p.w. $z \in T_k$,

$$F^{**}(z) \subset D_k := \operatorname{conv}(T_k \cup \{0\}). \tag{1.7}$$

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy przez $\mathcal{P}_n$ zbiór wszystkich ciągów rosnących $\theta : \mathbb{Z}_{0,n} \to \mathbb{R}$ takich, że $\theta_n - \theta_0 = 2\pi$. Wówczas dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i $\theta \in \mathcal{P}_n$, ciąg

$$\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto \mathrm{T}_k(\theta) := \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} : t \in [\theta_{k-1}; \theta_k]\} \tag{1.8}$$

jest partycją okręgu $\mathbb{T}$ i zachodzi równość

$$\frac{1}{2}\min(\{|\,\mathrm{T}_k(\theta)|_1 : k \in \mathbb{Z}_{1,n}\} = \delta_\theta := \frac{1}{2}\min(\{\theta_k - \theta_{k-1} : k \in \mathbb{Z}_{1,n}\}). \tag{1.9}$$

Na odwrót, dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ i partycji $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto T_k$ okręgu $\mathbb{T}$ istnieje ciąg $\theta \in \mathcal{P}_n$ i permutacja σ zbioru $\mathbb{Z}_{1,n}$ o tej własności, że $T_{\sigma(k)} = \mathrm{T}_k(\theta)$. Zatem każdą partycję można sprowadzić, permutując odpowiednio jej wyrazy, do partycji typu (1.8) generowanej przez pewien ciąg $\theta \in \mathcal{P}_n$. Dlatego w dalszym ciągu ograniczymy się wyłącznie do rozważania partycji typu (1.8). Wtedy ciąg

$$\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto \mathrm{D}_k(\theta) := \operatorname{conv}(\mathrm{T}_k(\theta) \cup \{0\}) \tag{1.10}$$

jest ciągiem sektorów stowarzyszonych z partycją (1.8).

Przy ustalonych $n \in \mathbb{N}$ i $\theta \in \mathcal{P}_n$ będziemy badać nierówność typu Schwarza dla klasy

$$\mathcal{F}_\theta := \operatorname{Har}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{N}(\mathrm{T}_1(\theta), \mathrm{T}_2(\theta), \dots, \mathrm{T}_n(\theta)). \tag{1.11}$$

Nawiązując do rozważań z podrozdziału 1.1 stwierdzamy, że

$$F^{**}(z) = \{F^*(z)\} \quad \text{dla każdego } F \in \mathcal{F}_\theta \text{ i p.w. } z \in \mathbb{T}. \tag{1.12}$$

W szczególności, dla każdej funkcji $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $F \in \mathcal{F}_\theta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F \in \operatorname{Har}(\mathbb{D})$ oraz $F^*(z) \in \mathrm{D}_k(\theta)$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$ i p.w. $z \in \mathrm{T}_k(\theta)$. Ponadto z własności (1.5) wynika, że

$$F = \mathrm{P}[F^*], \quad F \in \mathcal{F}_\theta. \tag{1.13}$$

Rozważmy przypadek, gdy $n = 1$. Przyjmując $\mathbb{D} \ni z \mapsto F(z) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ widzimy, że $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} \in \mathrm{T}_1(\theta)$, skąd $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} \in \mathrm{D}_1(\theta)$. Zatem $F \in \operatorname{Har}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{N}(\mathrm{T}_1(\theta))$ oraz $|F(z)| = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}| = 1$ dla $z \in \mathbb{D}$. Rozważmy teraz przypadek, gdy $n = 2$. Ponownie przyjmując $\mathbb{D} \ni z \mapsto F(z) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ tym razem widzimy, że $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} \in \mathrm{T}_1(\theta) \cap \mathrm{T}_2(\theta)$, skąd $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} \in \mathrm{D}_1(\theta)$ i $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} \in \mathrm{D}_2(\theta)$. Zatem $F \in \operatorname{Har}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{N}(\mathrm{T}_1(\theta), \mathrm{T}_2(\theta))$ oraz $|F(z)| = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}| = 1$ dla $z \in \mathbb{D}$. Reasumując, jeśli $n \leqslant 2$ to mamy trywialne, dokładne oszacowanie $|F(z)| \leqslant 1$ dla $F \in \mathcal{F}_\theta$ i $z \in \mathbb{D}$, gdzie równość zachodzi dla funkcji stałej. Wobec tego od teraz stale zakładamy, że $n \in \mathbb{Z}_3$.

Rozdział 2

Wyniki pomocnicze

W tym rozdziale przypominamy pojęcie miary harmonicznej i dowodzimy szereg jej użytecznych własności, mających zastosowanie w dalszej części rozprawy przy wyznaczaniu nierówności typu Schwarza. Następnie prezentujemy charakteryzację klasy odwzorowań harmonicznych spełniających normalizację sektorową i wykazujemy kilka przydatnych własności tej klasy.

2.1 Miara harmoniczna

Niech $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ będzie obszarem Jordana, tzn. brzeg $\operatorname{fr}(\Omega)$ jest krzywą Jordana. Miarą harmoniczną łuku $I \subset \operatorname{fr}(\Omega)$ w punkcie $z \in \Omega$ względem obszaru Ω nazywamy wartość $\omega(z, I; \Omega) := F(z)$, gdzie F jest rzeczywistą funkcją harmoniczną i ograniczoną w Ω taką, że $F(z) \to 1$, gdy $\Omega \ni z \to \zeta \in I \setminus \{u, v\}$ oraz $F(z) \to 0$, gdy $\Omega \ni z \to \zeta \in \operatorname{fr}(\Omega) \setminus (I \cup \{u, v\})$, gdzie u i v są końcami łuku I. Powyższe warunki jednoznacznie wyznaczają funkcję F; por. [2, Sec. 3–1], [6, Sec. 1.4], [12, Sec. 6.1]. Granice funkcji F w końcach u i v nie istnieją. Niemniej jednak pewna forma zbieżności ma miejsce. Na przykład dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takich, że $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$,

$$\lim_{r \to 1^-} \omega(ru, I; \mathbb{D}) := \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad u \in I \setminus \{e^{i\alpha}, e^{i\beta}\}, \\ 0, & \text{gdy} \quad u \in \mathbb{T} \setminus I, \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy} \quad u \in \{e^{i\alpha}, e^{i\beta}\}, \end{cases}$$

gdzie $I := \{e^{it} : t \in [\alpha; \beta]\}$. Zauważmy, że dla dowolnych $G \in \operatorname{Hol}(\Omega)$ i $F \in \operatorname{Har}(G(\Omega))$,

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial}(F \circ G) &= \partial\Big((\partial F \circ G)\bar{\partial} G + (\bar{\partial} F \circ G)\overline{\partial G}\Big) = \partial\Big((\bar{\partial} F \circ G)\overline{\partial G}\Big) \\ &= \partial(\bar{\partial} F \circ G)\overline{\partial G} + (\bar{\partial} F \circ G)\partial\overline{\partial G} \\ &= \Big((\partial\bar{\partial} F \circ G)\partial G + (\bar{\partial}\bar{\partial} F \circ G)\partial\overline{G}\Big)\overline{\partial G} = 0 \quad \text{w } \Omega, \end{aligned}$$

skąd na mocy (1.3), $F \circ G \in \mathrm{Har}(\Omega)$. Jeśli ponadto F jest funkcją rzeczywistą ograniczoną to złożenie $F \circ G$ też ma tę własność. Stąd wynika następująca własność konforemnej niezmienniczości miary harmonicznej (por. [12, Sec. 6.1])

$$\omega(z, I; \Omega) = \omega(G(z), \tilde{G}(I); G(\Omega)), \quad z \in \Omega, \tag{2.1}$$

przy założeniu, że G odwzorowuje konforemnie obszar Ω na obszar Jordana $G(\Omega)$. Wtedy odwzorowanie G ma rozszerzenie do homeomorfizmu $\tilde{G}$ domknięcia $\mathrm{cl}(\Omega)$ na domknięcie $\mathrm{cl}(G(\Omega))$; por. [18, Theorem 14.19].

Ponieważ dla każdego łuku $T \subset \mathbb{T}$, $\omega(z, T; \mathbb{D}) = \mathrm{P}[\chi_T](z)$ dla $z \in \mathbb{D}$, więc z (2.1) dostajemy w szczególności zależność

$$\mathrm{P}[\chi_{uT}](uz) = \mathrm{P}[\chi_T](z), \quad u \in \mathbb{T},\ z \in \mathbb{D}. \tag{2.2}$$

Tu i w dalszym ciągu przyjmujemy $\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}$ dla $\lambda \in \mathbb{C}$ i zbioru niepustego $A \subset \mathbb{C}$.

Dla dowolnego $\alpha \in (0; \pi]$ rozważmy łuk

$$I_\alpha := \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} : |t - \pi| \leqslant \alpha\}. \tag{2.3}$$

Ponadto przyjmujemy $\log := (\exp|_\Omega)^{-1}$, gdzie $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \pi\}$.

Lemat 2.1. *Dla każdego* $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}]$ *zachodzi równość*

$$\mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{Re} z + (1 + |z|^2)\cos(\alpha)}{(1 - |z|^2)\sin(\alpha)}\right), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{2.4}$$

gdzie łuk I_α *dany jest wzorem* (2.3).

Dowód. Ustalając dowolnie $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}]$ widzimy, że $e_1' := \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - \alpha)} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$ oraz $e_2' := \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi + \alpha)} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ są punktami końcowymi łuku I_α. Rozważmy homografię $h : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ spełniającą warunek

$$h(z) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \frac{e_2' - z}{z - e_1'},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{e_1'\}. \tag{2.5}$$

Ponieważ $h(e_1') = \infty$, $h(e_2') = 0$, $h(-1) = \mathrm{i}$ oraz $\operatorname{Re} h(0) > 0$, więc h przekształca konforemnie koło $\mathbb{D}$ na prawą półpłaszczyznę $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. Ponadto $h(I_\alpha \setminus \{e_1', e_2'\}) = \{\mathrm{i}t : t \in (0; +\infty)\}$ oraz $h(\mathbb{T} \setminus I_\alpha) = \{-\mathrm{i}t : t \in (0; +\infty)\}$. Stąd funkcja

$$\mathbb{D} \ni z \mapsto \Psi_\alpha(z) := \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \log h(z) \tag{2.6}$$

jest dobrze określona. Zatem funkcja (2.6) jest funkcją harmoniczną i $\Psi_\alpha(z) \to \frac{1}{2}$, gdy $\mathbb{D} \ni z \mapsto u$ dla $u \in I_\alpha \setminus \{e_1', e_2'\}$, i $\Psi_\alpha(z) \to -\frac{1}{2}$, gdy $\mathbb{D} \ni z \mapsto u$ dla $u \in \mathbb{T} \setminus I_\alpha$. Ponadto $|\Psi_\alpha(z)| < \frac{1}{2}$ dla $z \in \mathbb{D}$. Dlatego

$$\mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](z) = \frac{1}{2} + \Psi_\alpha(z), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{2.7}$$

Łącząc (2.5) i (2.6) otrzymujemy

$$\Psi_\alpha(z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \log \left[\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \frac{-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - z}{z + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}} \right] = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \log \left[-\mathrm{i} \frac{1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} z}{z + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}} \right], \quad z \in \mathbb{D}.$$

Stąd dla każdego $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(z) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \log \left[-\mathrm{i} \frac{1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} z}{z + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}} \right] = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \log \left[-\mathrm{i} \frac{(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} z)\overline{(z + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})}}{|z + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}|^2} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \log \left[-\mathrm{i}(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} z)(\bar{z} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}) \right] - \log |z + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}|^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \log \left[-\mathrm{i}(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} z)(\bar{z} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \log \left[-\mathrm{i}(\bar{z} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}|z|^2 + z) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \log \left[-2\mathrm{i} \operatorname{Re} z - \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}|z|^2 - \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \log \left[\sin(\alpha)(1 - |z|^2) - \mathrm{i}(2 \operatorname{Re} z + \cos(\alpha)(1 + |z|^2)) \right]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Zatem

$$\Psi_\alpha(z) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \operatorname{Re} z + \cos(\alpha)(1 + |z|^2)}{\sin(\alpha)(1 - |z|^2)} \right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

To łącznie z (2.7) daje równość (2.4), co kończy dowód. □

Uwaga 2.2. W szczególnym przypadku, gdy $\alpha = \frac{\pi}{3}$, równość w (2.4) przyjmuje postać

$$\mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + 4 \operatorname{Re} z + |z|^2}{\sqrt{3}(1 - |z|^2)} \right), \ z \in \mathbb{D}.$$

Uwaga 2.3. W szczególnym przypadku, gdy $\alpha = \frac{\pi}{4}$, równość w (2.4) przyjmuje postać

$$\mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}(1 + |z|^2) + 4 \operatorname{Re} z}{\sqrt{2}(1 - |z|^2)} \right), \ z \in \mathbb{D}.$$

Lemat 2.4. *Dla każdego $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}]$ zachodzi oszacowanie*

$$\begin{aligned} \mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](z) \geqslant \mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](|z|) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2|z| + (1 + |z|^2)\cos(\alpha)}{(1 - |z|^2)\sin(\alpha)} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{(1 - |z|^2)\sin(\alpha)}{2|z| + (1 + |z|^2)\cos(\alpha)} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\alpha)}{|z| + \cos(\alpha)} \right) - \frac{\alpha}{\pi}, \quad z \in \mathbb{D}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

gdzie I_α jest łukiem danym wzorem (2.3)*. Równość w* (2.9) *zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $z = |z|$.*

Oszacowanie (2.9) z ostatnią równością pojawiło się w pracy [7, Lemma 3.2]. Poniżej zaprezentujemy jego alternatywny dowód wraz z dwoma dodatkowymi równościami.

Dowód. Niech $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}]$ oraz $z \in \mathbb{D}$ będą dowolnie ustalone. Przyjmując $r := |z|$ otrzymujemy na mocy lematu 2.1,

$$\mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{2r\cos(t) + (1+r^2)\cos(\alpha)}{(1-r^2)\sin(\alpha)}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Ponieważ funkcja arctg jest rosnąca, więc funkcja (2.10) osiąga wartość najmniejszą dla $t = 0$. Zatem

$$\mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](z) \geqslant \mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](|z|) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{2|z| + (1+|z|^2)\cos(\alpha)}{(1-|z|^2)\sin(\alpha)}\right), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{2.11}$$

co daje oszacowanie w (2.9) wraz z pierwszą równością. Korzystając z (2.8) dla $z := |z|$ otrzymujemy

$$\Psi_\alpha(|z|) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\log\left[-\mathrm{i}(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}|z|)(|z|+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})\right].$$

Ponieważ każdy z czynników w argumencie funkcji log oraz ich iloczyn leżą w obszarze $\mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \in (-\infty; 0]\}$, więc z własności funkcji log otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha(|z|) &= \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\log(-\mathrm{i}) + \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\log\left[2|z| + (1+|z|^2)\cos(\alpha) + \mathrm{i}((1-|z|^2)\sin(\alpha))\right]\\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{(1-|z|^2)\sin(\alpha)}{2|z| + (1+|z|^2)\cos(\alpha)}\right).\end{aligned}$$

To łącznie z równością (2.7) dla $z := |z|$ daje drugą równość w (2.9). Korzystając ponownie z (2.8) dla $z := |z|$, dostajemy

$$\Psi_\alpha(|z|) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\log\left[-\mathrm{i}(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}|z|)(|z|+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})\right] = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\log\left[-\mathrm{i}(|z|+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right].$$

Ponieważ każdy z czynników w argumencie drugiej funkcji log oraz ich iloczyn leżą w obszarze $\mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \in (-\infty; 0]\}$, więc z własności funkcji log otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha(|z|) &= \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\log(-\mathrm{i}) + \frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\log\left(|z|+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right) + \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\log\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right)\\ &= -\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\log\left(|z|+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right) - \frac{\alpha}{\pi}.\end{aligned}$$

To wraz z równością (2.7) dla $z := |z|$ prowadzi do

$$\mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](|z|) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\log\left(|z|+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right) - \frac{\alpha}{\pi} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\alpha)}{|z|+\cos(\alpha)}\right) - \frac{\alpha}{\pi}, \quad z \in \mathbb{D},$$

co daje trzecią równość w (2.9).

Ponadto na mocy (2.10), $\mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](re^{\mathrm{i}t}) > \mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](r)$ dla $r \in [0;1)$ i $t \in [-\pi,\pi] \setminus \{0\}$, gdyż funkcja arctg jest rosnąca. Zatem równość $\mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](re^{\mathrm{i}t}) = \mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](r)$ zachodzi wyłącznie w przypadku, gdy $t = 0$. Tym samym równość w (2.9) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $z = |z|$, co kończy dowód. □

Wniosek 2.5. *Dla każdego $\theta \in \mathcal{P}_n$ zachodzi oszacowanie*

$$p(z) \geqslant \mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](|z|) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{|z| + \cos(\delta)}\right) - \frac{\delta}{\pi}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{2.12}$$

gdzie

$$p(z) := \min(\{\mathrm{P}[\chi_{T_k}](z) : \ k \in \mathbb{Z}_{1,n}\}), \tag{2.13}$$

zaś $\delta := \delta_\theta$ i $T_k := \mathrm{T}_k(\theta)$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$.

Dowód. Ustalmy dowolnie $\theta \in \mathcal{P}_n$. Niech $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto a_k \in \mathbb{T}$ będzie ciągiem punktów środkowych partycji $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto T_k \subset \mathbb{T}$, tzn.,

$$T_k := \{a_k e^{\mathrm{i}t} : |t| \leqslant \alpha_k\}, \tag{2.14}$$

gdzie $\alpha_k := \frac{1}{2}|T_k|_1$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Stąd i z (1.9) otrzymujemy na mocy wzoru (2.3) inkluzje $I_\delta \subset I_{\alpha_k}$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Następnie stosując wzór (1.4) widzimy, że dla dowolnie ustalonego $z \in \mathbb{D}$,

$$\mathrm{P}[\chi_{I_{\alpha_k}}](|z|) = \mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](|z|) + \mathrm{P}[\chi_{I_{\alpha_k}\setminus I_\delta}](|z|) \geqslant \mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](|z|), \quad k \in \mathbb{Z}_{1,n}.$$

Zatem

$$\min(\{\mathrm{P}[\chi_{I_{\alpha_k}}](|z|) : k \in \mathbb{Z}_{1,n}\}) = \mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](|z|), \tag{2.15}$$

gdyż $\delta = \alpha_{k'}$ dla pewnego $k' \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Ustalmy $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Stosując obrót $\mathbb{C} \ni \zeta \mapsto \varphi(\zeta) := -a_k^{-1}\zeta$ otrzymujemy $\varphi(T_k) = I_{\alpha_k}$, skąd na mocy (2.2) dostajemy

$$\mathrm{P}[\chi_{T_k}](z) = \mathrm{P}[\chi_{\varphi(T_k)}](\varphi(z)) = \mathrm{P}[\chi_{I_{\alpha_k}}](\varphi(z)).$$

Z drugiej strony na podstawie lematu 2.4,

$$\mathrm{P}[\chi_{I_{\alpha_k}}](\varphi(z)) \geqslant \mathrm{P}[\chi_{I_{\alpha_k}}](|\varphi(z)|) = \mathrm{P}[\chi_{I_{\alpha_k}}](|z|).$$

Zatem

$$\mathrm{P}[\chi_{T_k}](z) \geqslant \mathrm{P}[\chi_{I_{\alpha_k}}](|z|), \quad k \in \mathbb{Z}_{1,n}.$$

Łącząc to z (2.13) i (2.15) wyprowadzamy nierówność w (2.12). Równość w (2.12) jest konsekwencją lematu 2.4, co kończy dowód. □

Wniosek 2.6. *Dla dowolnych* $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, $z \in \mathbb{D}$ *i łuku domkniętego* $T \subset \mathbb{T}$*, jeśli* $|T|_1 \geqslant 2\alpha$ *i* $\mathrm{P}[\chi_T](z) = \mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](|z|)$ *to* $|T|_1 = 2\alpha$ *i* $-\overline{u}z = |z|$*, gdzie* u *jest środkiem łuku* T*.*

Dowód. Ustalmy dowolnie α, z i T spełniające założenia. Przyjmując $\beta := \frac{1}{2}|T|_1$ widzimy, że $-\overline{u}T = I_\beta$. Korzystając z zależności (2.2) i wzoru (1.4) dostajemy

$$\mathrm{P}[\chi_T](z) = \mathrm{P}[\chi_{-\overline{u}T}](-\overline{u}z) = \mathrm{P}[\chi_{I_\beta}](-\overline{u}z) \geqslant \mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](-\overline{u}z), \tag{2.16}$$

gdyż $I_\alpha \subset I_\beta$. Dlatego na mocy założenia, że $\mathrm{P}[\chi_T](z) = \mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](|z|)$,

$$\mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](-\overline{u}z) \leqslant \mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](|z|) = \mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](|-\overline{u}z|).$$

Stąd na mocy lematu 2.4, $\mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](-\overline{u}z) = \mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](|z|)$ i $-\overline{u}z = |z|$. To łącznie z (2.16) implikuje równość $\mathrm{P}[\chi_{I_\alpha}](|z|) = \mathrm{P}[\chi_{I_\beta}](|z|)$, z której wynika, że $\alpha = \beta$. Zatem $|T|_1 = 2\beta = 2\alpha$, co kończy dowód. □

Definicja 2.7. Punkt p nazywamy *punktem mocno ekstremalnym zbioru* $A \subset \mathbb{C}$ $:\Leftrightarrow$ p jest punktem ekstremalnym zbioru A i istnieje prosta $l \subset \mathbb{C}$ taka, że $l \cap A = \{p\}$.

Wykażemy teraz uogólniony wariant [17, Lemma 3.1].

Lemat 2.8. *Dla dowolnych* $a \in \mathbb{D}$ *i* $b \in \mathbb{C}$*, łuku domkniętego* $T \subset \mathbb{T}$*, zbioru niepustego i wypukłego* $D \subset \mathbb{C}$*, funkcji całkowalnej* $f : \mathbb{T} \to D$*, jeśli* $0 < |T|_1$*,* b *jest punktem mocno ekstremalnym zbioru* D*,*

$$f(z) \in D \quad \text{dla p.w. } z \in T \tag{2.17}$$

oraz

$$\mathrm{P}[f \cdot \chi_T](a) = b\,\mathrm{P}[\chi_T](a), \tag{2.18}$$

to $f(z) = b$ *dla p.w.* $z \in T$*.*

Dowód. Ustalmy dowolnie a, b, T, D i f spełniające założenia lematu. Jeśli $D = \{b\}$ to wobec założenia $f(\mathbb{T}) \subset D$, $f(z) = b$ dla $z \in T$, a to jest teza lematu. Możemy więc założyć, że $D \neq \{b\}$, czyli istnieje $w_0 \in D \setminus \{b\}$. Ustalmy dowolnie $w \in D \setminus \{b\}$. Jeśli $\lambda := \frac{w-b}{w_0-b} \in (-\infty; 0)$ to $w - b = \lambda(w_0 - b)$, skąd $b = \frac{1}{1-\lambda}w + \frac{-\lambda}{1-\lambda}w_0$, a więc b nie jest punktem ekstremalnym zbioru D, co przeczy założeniu. Dlatego $\frac{w-b}{w_0-b} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty; 0]$ dla $w \in D \setminus \{b\}$, i tym samym funkcja

$$D \setminus \{b\} \ni w \mapsto \varphi(w) := \operatorname{Im} \log \frac{w - b}{w_0 - b} \tag{2.19}$$

jest dobrze określona. Na mocy wzoru (2.19), $\varphi(D \setminus \{b\}) \subset (-\pi; \pi)$, a więc

$$-\pi \leqslant \alpha := \inf \varphi(D \setminus \{b\}) \leqslant \beta := \sup \varphi(D \setminus \{b\}) \leqslant \pi. \tag{2.20}$$

Ponieważ D jest zbiorem wypukłym i $w_0 \in D$, więc dla każdego $w \in D$, $E_w := \{tw + (1-t)w_0 : t \in [0;1]\} \subset D$. Ponadto, jeśli $b \in E_w$ dla pewnego $w \in D \setminus \{b\}$, to b nie jest punktem ekstremalnym zbioru D, co przeczy założeniu. Zatem $E_w \subset D \setminus \{b\}$ dla $w \in D \setminus \{b\}$. Ponieważ $\varphi(w_0) = 0$ i φ jest funkcją ciągłą, więc $\varphi(E_w)$ jest przedziałem i $0 \in \varphi(E_w)$ dla $w \in D \setminus \{b\}$. W konsekwencji $\varphi(D \setminus \{b\})$ jest przedziałem, gdyż

$$\varphi(D \setminus \{b\}) = \varphi\Big(\bigcup_{w \in D \setminus \{b\}} E_w\Big) = \bigcup_{w \in D \setminus \{b\}} \varphi(E_w).$$

To łącznie z (2.20) oznacza, że

$$(\alpha; \beta) \subset \varphi(D \setminus \{b\}) \subset [\alpha; \beta]. \tag{2.21}$$

Załóżmy, że $\beta - \alpha > \pi$. Istnieją wówczas $w_1, w_2 \in D \setminus \{b\}$ takie, że $\varphi(w_1) = \theta$ i $\varphi(w_2) = \theta + \pi$ dla pewnego $\theta \in (-\pi; 0)$. Stąd na mocy wzoru (2.19),

$$\log \frac{w_1 - b}{w_0 - b} = r_1 + \mathrm{i}\theta \quad \text{oraz} \quad \log \frac{w_2 - b}{w_0 - b} = r_2 + \mathrm{i}\theta + \mathrm{i}\pi$$

dla pewnych $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, i w konsekwencji $w_1 - b = (w_0 - b)\mathrm{e}^{r_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ oraz $w_2 - b = -(w_0 - b)\mathrm{e}^{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, co daje $(w_1 - b)\mathrm{e}^{-r_1} = -(w_2 - b)\mathrm{e}^{-r_2}$. Zatem $(\mathrm{e}^{-r_1} + \mathrm{e}^{-r_2})b = \mathrm{e}^{-r_1}w_1 + \mathrm{e}^{-r_2}w_2$, czyli b nie jest punktem ekstremalnym zbioru D, co przeczy założeniu. Dlatego $\beta - \alpha \leqslant \pi$. Rozważmy funkcję

$$\mathbb{C} \ni w \mapsto \lambda(w) := \frac{w - b}{w_0 - b}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha+\beta}{2}}. \tag{2.22}$$

Dla dowolnie zadanego $w \in D \setminus \{b\}$ stwierdzamy na mocy wzoru (2.19), że

$$\log \frac{w - b}{w_0 - b} = r_w + \mathrm{i}\varphi(w),$$

gdzie $r_w := \log \left|\frac{w-b}{w_0-b}\right|$. To łącznie z (2.22) daje

$$\lambda(w) = \mathrm{e}^{r_w + \mathrm{i}\varphi(w)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha+\beta}{2}} = \mathrm{e}^{r_w}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\varphi(w) - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \mathrm{e}^{r_w}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_w}, \tag{2.23}$$

gdzie wobec nierówności (2.20),

$$\theta_w := \varphi(w) - \frac{\alpha+\beta}{2} \in \left[-\frac{\beta-\alpha}{2}; \frac{\beta-\alpha}{2}\right]. \tag{2.24}$$

Jeśli $\beta - \alpha < \pi$ to na podstawie (2.22), (2.23) i (2.24) dostajemy inkluzję

$$\lambda(D) \subset \{0\} \cup \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\zeta > 0\}. \tag{2.25}$$

W przeciwnym przypadku $\beta - \alpha \geqslant \pi$. Z drugiej strony wiemy, że $\beta - \alpha \leqslant \pi$. Zatem $\beta - \alpha = \pi$, i uwzględniając (2.23) i (2.24) dostajemy inkluzję

$$\lambda(D) \subset \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\zeta \geqslant 0\}. \tag{2.26}$$

Z inkluzji (2.21) wynika, że dla dowolnie ustalonego $\tau \in (\alpha;\beta)$ istnieje $p \in D \setminus \{b\}$ taki, że $\varphi(p) = \tau$. Stąd na mocy (2.19),

$$\log \frac{p-b}{w_0 - b} = r_p + \mathrm{i}\varphi(p) = r_p + \mathrm{i}\tau,$$

gdzie $r_p := \log\left|\frac{p-b}{w_0-b}\right|$. Zatem $p - b = (w_0 - b)\mathrm{e}^{r_p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}$, i w konsekwencji

$$\{p, b\} \subset \{t(p-b) + b : t \in \mathbb{R}\} = l_\tau := \{t(w_0 - b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} + b : t \in \mathbb{R}\}, \tag{2.27}$$

czyli $\{p, b\} \subset D \cap l_\tau$. Dlatego dla każdego $\tau \in (\alpha;\beta)$, $l_\tau \cap D \neq \{b\}$. Z drugiej strony na mocy założenia, b jest punktem mocno ekstremalnym zbioru D. Zatem $l_\alpha \cap D = \{b\}$. Stosując wzór (2.22) dostajemy

$$\begin{aligned} \lambda(l_\alpha) &= \{\lambda(t(w_0 - b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + b) : t \in \mathbb{R}\} = \{\mathrm{i}t : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\zeta = 0\}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Stąd

$$\lambda(D) = \lambda(D \cap l_\alpha \cup (D \setminus l_\alpha)) = \lambda(D \cap l_\alpha) \cup \lambda(D \setminus l_\alpha) = \{0\} \cup (\lambda(D) \setminus \lambda(l_\alpha)),$$

co łącznie z (2.26) i (2.28) daje inkluzję (2.25). Korzystając więc z założenia (2.17) mamy

$$\lambda \circ f(z) \in \lambda(D) \subset \{0\} \cup \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\zeta > 0\} \quad \text{dla p.w. } z \in T. \tag{2.29}$$

Dlatego $\operatorname{Re}\lambda(f(z)) \geqslant 0$ dla p.w. $z \in T$. Ze wzoru (2.22) wynika, że $\lambda(w) = \mu w + \nu$ dla $w \in \mathbb{C}$, gdzie $\mu := \frac{1}{w_0-b}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha+\beta}{2}}$ i $\nu := \frac{-b}{w_0-b}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha+\beta}{2}}$. Korzystając z równości (2.18) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{P}[\operatorname{Re}((\lambda\circ f)\cdot \chi_T)](a)}{\mathrm{P}[\chi_T](a)} &= \operatorname{Re}\frac{\mathrm{P}[(\mu f + \nu)\cdot\chi_T](a)}{\mathrm{P}[\chi_T](a)} = \operatorname{Re}\frac{\mu\,\mathrm{P}[f\cdot\chi_T](a) + \nu\,\mathrm{P}[\chi_T](a)}{\mathrm{P}[\chi_T](a)} \\ &= \operatorname{Re}\Big(\mu\frac{\mathrm{P}[f\cdot\chi_T](a)}{\mathrm{P}[\chi_T](a)} + \nu\Big) = \operatorname{Re}(\mu b + \nu) = 0. \end{aligned}$$

Stąd funkcja harmoniczna o wartościach rzeczywistych $\mathrm{P}[\mathrm{Re}((\lambda\circ f)\cdot\chi_T)]$ osiąga minimum w punkcie a, a więc na mocy zasady minimum dla funkcji harmonicznych o wartościach rzeczywistych dostajemy

$$\mathrm{P}[\mathrm{Re}((\lambda\circ f)\cdot\chi_T)](z)=0,\quad z\in\mathbb{D}.$$

Zatem dla p.w. $z\in T$,

$$\mathrm{Re}\,\lambda(f(z))=\mathrm{Re}((\lambda\circ f)\cdot\chi_T)(z)=\lim_{r\to1^-}\mathrm{P}[\mathrm{Re}((\lambda\circ f)\cdot\chi_T)](rz)=0;$$

por. [5, Corollary 2, Sec. 1.2]. To łącznie z (2.29) prowadzi do równości $\lambda(f(z))=0$ dla p.w. $z\in T$. Stąd $f(z)=b$ dla p.w. $z\in T$, co kończy dowód. □

2.2 Charakteryzacja odwzorowań harmonicznych z normalizacją sektorową

W tym podrozdziale przyjmujemy $T_k:=\mathrm{T}_k(\theta)$ i $D_k:=\mathrm{D}_k(\theta)$ dla $\theta\in\mathcal{P}_n$ i $k\in\mathbb{Z}_{1,n}$. Niech χ_I oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $I\in\mathbb{T}$, tzn., $\chi_I(t):=1$ dla $t\in I$ oraz $\chi_I(t):=0$ dla $t\in\mathbb{T}\setminus I$. Wykażemy teraz wzmocnione wersje wyników z [7, Sec. 2]. Wzmocnienie polega na usunięciu ograniczenia $|T_k|_1\leqslant\pi$ dla $k\in\mathbb{Z}_{1,n}$.

Lemat 2.9. *Dla wszystkich $\theta\in\mathcal{P}_n$, $F\in\mathcal{F}_\theta$ i $z\in\mathbb{D}$ istnieje ciąg $\mathbb{Z}_{1,n}\ni k\mapsto c_k\in D_k$ taki, że zachodzi równość*

$$F(z)=\sum_{k=1}^{n}c_k\,\mathrm{P}[\chi_{T_k}](z). \tag{2.30}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie $\theta\in\mathcal{P}_n$, $F\in\mathcal{F}_\theta$ oraz $z\in\mathbb{D}$. Ponieważ $|T_k|_1>0$ dla $k\in\mathbb{Z}_{1,n}$, więc

$$0<p_k:=\mathrm{P}[\chi_{T_k}](z)<1,\quad k\in\mathbb{Z}_{1,n}. \tag{2.31}$$

Na mocy wzoru (1.7), każdy zbiór D_k, gdzie $k\in\mathbb{Z}_{1,n}$, jest domknięty i wypukły. Co więcej, z (1.7) i (1.12) wynika, że $F^*(z)\in D_k$ dla $k\in\mathbb{Z}_{1,n}$ i p.w. $z\in T_k$. Stąd i z (2.31) wnioskujemy, stosując twierdzenie o wartości średniej dla funkcji o wartościach zespolonych, że

$$c_k:=P\Big[\frac{1}{p_k}\cdot F^*\cdot\chi_{T_k}\Big](z)\in D_k,\quad k\in\mathbb{Z}_{1,n}.$$

Korzystając teraz z (1.13) dostajemy

$$\begin{aligned}F(z)=\mathrm{P}[F^*](z)&=\mathrm{P}\Big[\sum_{k=1}^{n}F^*\cdot\chi_{T_k}\Big](z)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}\Big[F^*\cdot\chi_{T_k}\Big](z)\\&=\sum_{k=1}^{n}p_k\,\mathrm{P}\Big[\frac{1}{p_k}\cdot F^*\cdot\chi_{T_k}\Big](z)=\sum_{k=1}^{n}p_kc_k,\end{aligned}$$

a to implikuje równość (2.30). □

Lemat 2.10. *Dla każdego $\theta \in \mathcal{P}_n$ i każdego ciągu $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto c_k \in D_k$,*

$$F := \sum_{k=1}^{n} c_k \, \mathrm{P}[\chi_{T_k}] \in \mathcal{F}_\theta. \tag{2.32}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie $\theta \in \mathcal{P}_n$. Mając dany ciąg $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto c_k \in D_k$ rozważmy funkcję F określoną wzorem (2.32). Ponieważ $\mathrm{P}[\chi_{T_k}] \in \mathrm{Har}(\mathbb{D})$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$ widzimy, że $F \in \mathrm{Har}(\mathbb{D})$. Ponadto dla każdego $z \in \mathbb{D}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}[\chi_{T_k}](z) = \mathrm{P}\Big[\sum_{k=1}^{n} \chi_{T_k}\Big](z) = \mathrm{P}[\chi_{\mathbb{T}}](z) = 1,$$

skąd

$$|F(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k| \, \mathrm{P}[\chi_{T_k}](z) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}[\chi_{T_k}](z) = 1.$$

Z definicji funkcji F mamy

$$F^*(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{T_k}(z), \quad z \in \mathbb{T} \setminus E, \tag{2.33}$$

gdzie E jest zbiorem wszystkich $u \in \mathbb{T}$ takich, że u jest punktem końcowym pewnego łuku spośród łuków T_k dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Załóżmy, że $|F(z_0)| = 1$ dla pewnego $z_0 \in \mathbb{D}$. Na mocy zasady maksimum dla modułu funkcji harmonicznych o wartościach zespolonych (por. [3, Corollary 1.11, Chap. 1]) istnieje $w \in \mathbb{T}$ taki, że $F(z) = w$ dla $z \in \mathbb{D}$, a więc $F^*(z) = w$ dla $z \in \mathbb{T}$. Z (2.33) wynika, że

$$F^*(z) = c_k, \quad k \in \mathbb{Z}_{1,n}, \, z \in T_k \setminus E. \tag{2.34}$$

Zatem $w = c_k \in D_k$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Ponieważ $|w| = 1$, więc

$$w \in \mathbb{T} \cap (D_1 \cap D_2 \cap D_3) = T_1 \cap T_2 \cap T_3 = \emptyset,$$

co jest niemożliwe. Dlatego $|F(z)| < 1$ dla $z \in \mathbb{D}$, a więc $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Ponadto z (2.34) wynika, że $F \in \mathcal{N}(T_1, T_2, \ldots, T_n)$, a to implikuje własność (2.32). □

Twierdzenie 2.11. *Dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_n$ i zbioru zwartego $K \subset \mathbb{D}$ istnieją ciąg $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto c_k \in D_k$ i $z_K \in \mathrm{fr}(K)$ takie, że*

$$F_K := \sum_{k=1}^{n} c_k \, \mathrm{P}[\chi_{T_k}] \in \mathcal{F}_\theta \tag{2.35}$$

oraz

$$|F(z)| \leqslant |F_K(z_K)| = \Big|\sum_{k=1}^{n} c_k \, \mathrm{P}[\chi_{T_k}](z_K)\Big|, \quad F \in \mathcal{F}_\theta \, , \, z \in K. \tag{2.36}$$

W szczególności,

$$\max(\{|F(z)| : F \in \mathcal{F}_\theta \, , \, z \in K\}) = |F_K(z_K)|. \tag{2.37}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie $\theta \in \mathcal{P}_n$ i zbiór zwarty $K \subset \mathbb{D}$. Ponieważ $F(K) \subset F(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ dla $F \in \mathcal{F}_\theta$, więc

$$M_K := \sup(\{|F(z)| : F \in \mathcal{F}_\theta\,,\ z \in K\}) \leqslant 1. \tag{2.38}$$

Stąd istnieją ciągi $\mathbb{N} \ni m \mapsto F_m \in \mathcal{F}_\theta$ oraz $\mathbb{N} \ni m \mapsto z_m \in K$ takie, że

$$\lim_{m\to+\infty} |F_m(z_m)| = M_K. \tag{2.39}$$

Z lematu 2.9 wynika, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje ciąg $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto c_{m,k} \in D_k$ taki, że

$$F_m(z_m) = \sum_{k=1}^{n} c_{m,k}\, \mathrm{P}[\chi_{T_k}](z_m). \tag{2.40}$$

Ponieważ zbiór D_k jest zwarty dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$, więc stosując standardową technikę wyboru podciągu zbieżnego na zbiorze zwartym widzimy, że istnieją ciąg rosnący $\mathbb{N} \ni l \mapsto m_l \in \mathbb{N}$, ciąg $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto c_k \in D_k$ oraz $z'_K \in K$ takie, że

$$c_{m_l,k} \to c_k,\ \text{gdy } l \to +\infty, \quad k \in \mathbb{Z}_{1,n} \tag{2.41}$$

oraz

$$z_{m_l} \to z'_K,\ \text{gdy } l \to +\infty. \tag{2.42}$$

Własność (2.35) jest konsekwencją lematu 2.10. Z równości (2.40) wnioskujemy, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|F_K(z_m) - F_m(z_m)| &= \Big|\sum_{k=1}^{n} c_k\, \mathrm{P}[\chi_{T_k}](z_m) - \sum_{k=1}^{n} c_{m,k}\, \mathrm{P}[\chi_{T_k}](z_m)\Big| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k - c_{m,k}|\, \mathrm{P}[\chi_{T_k}](z_m) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k - c_{m,k}|,
\end{aligned}$$

co łącznie z (2.41) prowadzi do

$$\lim_{l\to+\infty} |F_K(z_{m_l}) - F_{m_l}(z_{m_l})| = 0. \tag{2.43}$$

Ponieważ $|c_k| \leqslant 1$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$, więc

$$\begin{aligned}
|F_K(z'_K) - F_K(z_m)| &= \Big|\sum_{k=1}^{n} c_k\, \mathrm{P}[\chi_{T_k}](z'_K) - \sum_{k=1}^{n} c_k\, \mathrm{P}[\chi_{T_k}](z_m)\Big| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k| \cdot |\, \mathrm{P}[\chi_{T_k}](z'_K) - \mathrm{P}[\chi_{T_k}](z_m)| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} |\, \mathrm{P}[\chi_{T_k}](z'_K) - \mathrm{P}[\chi_{T_k}](z_m)|, \quad m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

To łącznie z (2.42) daje

$$\lim_{l\to+\infty} |F_K(z'_K) - F_K(z_{m_l})| = 0. \tag{2.44}$$

Ponieważ dla każdego $l \in \mathbb{N}$,

$$|F_K(z'_K) - F_{m_l}(z_{m_l})| \leqslant |F_K(z'_K) - F_K(z_{m_l})| + |F_K(z_{m_l}) - F_{m_l}(z_{m_l})|,$$

więc z (2.44) i (2.43) wnioskujemy, że

$$\lim_{l\to+\infty} |F_{m_l}(z_{m_l})| = |F_K(z'_K)|.$$

Stąd i z (2.39), $|F_K(z'_K)| = M_K$. Ponieważ $F_K \in \mathrm{Har}(\mathbb{D})$, więc korzystając z zasady maksimum dla modułu funkcji harmonicznych o wartościach zespolonych stwierdzamy, że istnieje $z_K \in \mathrm{fr}(K)$ taki, że $|F_K(z)| \leqslant |F_K(z_K)|$ dla $z \in K$. W szczególności, $M_K = |F_K(z'_K)| \leqslant |F_K(z_K)|$. Z drugiej strony, na mocy (2.35) i (2.38), $|F_K(z_K)| \leqslant M_K$. Ostatecznie, $|F_K(z_K)| = M_K$. To implikuje (2.37), i tym samym dowodzi nierówności (2.36), co kończy dowód. □

Rozdział 3

Nierówności typu Schwarza dla odwzorowań harmonicznych koła jednostkowego w siebie z normalizacją sektorową

Rozdział ten zawiera główne wyniki niniejszej pracy, czyli oszacowania typu Schwarza dla odwzorowań harmonicznych spełniających normalizację sektorową. Rozważania ogólne dotyczą oszacowań dla partycji okręgu na n łuków o dowolnej długości. Fundamentalnym wynikiem jest tutaj twierdzenie 3.1, które rozszerza twierdzenie [7, Theorem 3.1]. Następnie rozważania skupiamy na przypadku podziału okręgu jednostkowego na trzy łuki o dowolnej długości, tym samym uogólniając rezultaty otrzymane w [17, Corollary 2.2, Corollary 3.4]. Główny wynik stanowi twierdzenie 3.16, które podaje oszacowanie typu Schwarza dla partycji z trzema łukami, łącznie z konfiguracjami ekstremalnymi. Następnie wyznaczamy oszacowanie typu Schwarza dla partycji okręgu jednostkowego na cztery łuki o dowolnej długości, łącznie z konfiguracjami ekstremalnymi; por. twierdzenie 3.21.

3.1 Rozważania ogólne

Ważnym zastosowaniem twierdzenia 2.11 jest następujący rezultat.

Twierdzenie 3.1. *Dla wszystkich $\theta \in \mathcal{P}_n$ i $z \in \mathbb{D}$ zachodzi nierówność*

$$|F(z)| \leqslant 1 - (n - S)p(z), \quad F \in \mathcal{F}_\theta, \tag{3.1}$$

gdzie

$$S := \sup\Big(\Big\{\mathrm{Re}\Big(\overline{u}\sum_{k=1}^{n} v_k\Big) : u \in \mathbb{T}\,,\ \mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto v_k \in D_k\Big\}\Big) \tag{3.2}$$

oraz

$$p(z) := \min(\{p_k(z) :\ k \in \mathbb{Z}_{1,n}\}) \tag{3.3}$$

z $p_k := \mathrm{P}[\chi_{T_k}]$, $T_k := \mathrm{T}_k(\theta)$ *i* $D_k := \mathrm{D}_k(\theta)$ *dla* $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$. *Ponadto dla dowolnych* $z \in \mathbb{D}$ *i* $F \in \mathcal{F}_\theta$ *równość w (3.1) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją* $u \in \mathbb{T}$, *funkcja mierzalna* $f : \mathbb{T} \to \mathrm{cl}(\mathbb{D})$ *i ciąg* $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto c_k \in \mathrm{fr}(D_k)$ *spełniające następujące warunki:*

(i) $f(T_k) \subset D_k$ *oraz* $c_k p_k(z) = \mathrm{P}[f \cdot \chi_{T_k}](z), \quad k \in \mathbb{Z}_{1,n}$;

(ii) $F(z) = u \cdot |F(z)|$;

(iii) $S = \mathrm{Re}\Big(\overline{u} \sum_{k=1}^{n} c_k\Big)$;

(iv) $(1 - \mathrm{Re}(\overline{u}c_k))(p_k(z) - p(z)) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_{1,n}$;

(v) $F = \mathrm{P}[f]$.

Dowód. Ustalmy dowolnie $\theta \in \mathcal{P}_n$ i $z \in \mathbb{D}$. Na mocy twierdzenia 2.11 istnieje ciąg $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto c_k \in D_k$ taki, że

$$\tilde{F} := \sum_{k=1}^{n} c_k \,\mathrm{P}[\chi_{T_k}] \in \mathcal{F}_\theta \tag{3.4}$$

oraz

$$|F(z)| \leqslant |\tilde{F}(z)|, \quad F \in \mathcal{F}_\theta. \tag{3.5}$$

Przyjmując $u := \tilde{F}(z)/|\tilde{F}(z)|$, gdy $\tilde{F}(z) \neq 0$ oraz $u := 1$, gdy $\tilde{F}(z) = 0$ widzimy, że $u \in \mathbb{T}$ oraz $\tilde{F}(z) = u|\tilde{F}(z)|$. Stąd

$$|\tilde{F}(z)| = \overline{u}\tilde{F}(z) = \mathrm{Re}(\overline{u}\tilde{F}(z)) = \mathrm{Re}\Big(\overline{u}\sum_{k=1}^{n} c_k p_k(z)\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(\overline{u}c_k) p_k(z). \tag{3.6}$$

Ponieważ

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(z) = 1,$$

więc na mocy wzoru (3.3) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}(\overline{u}c_k)p_k(z) &= \sum_{k=1}^{n}(\operatorname{Re}(\overline{u}c_k) - 1 + 1)p_k(z) \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_k(z) + \sum_{k=1}^{n}(\operatorname{Re}(\overline{u}c_k) - 1)p_k(z) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k(z) + \sum_{k=1}^{n}(\operatorname{Re}(\overline{u}c_k) - 1)p(z) \qquad (3.7) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(p_k(z) - p(z)) + p(z)\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}(\overline{u}c_k) \\
&= 1 - np(z) + p(z)\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}(\overline{u}c_k).
\end{aligned}
$$

To łącznie z (3.6) oraz (3.2) daje

$$
\begin{aligned}
|\tilde{F}(z)| &\leqslant 1 - np(z) + p(z)\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}(\overline{u}c_k) \leqslant 1 - np(z) + p(z)S \\
&= 1 - (n-S)p(z).
\end{aligned} \qquad (3.8)
$$

Stąd i z (3.5) otrzymujemy oszacowanie (3.1).

Ustalmy dowolnie $z \in \mathbb{D}$ i $F \in \mathcal{F}_\theta$. Załóżmy, że zachodzi równość w (3.1), tzn.

$$
|F(z)| = 1 - (n-S)p(z). \qquad (3.9)
$$

Ponieważ $F \in \mathcal{F}_\theta$, więc $F^*(z) \in D_k$ dla p.w. $z \in T_k, k \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Przyjmując więc

$$
\mathbb{T} \ni z \mapsto f_k(z) := \begin{cases} F^*(z), & \text{gdy } z \in T_k \setminus \{e^{i\theta_{k-1}}, e^{i\theta_k}\} \wedge F^*(z) \in D_k, \\ 0, & \text{gdy } z \notin T_k \setminus \{e^{i\theta_{k-1}}, e^{i\theta_k}\} \vee F^*(z) \notin D_k \end{cases}
$$

dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$ widzimy, że $f := \sum_{k=1}^{n} f_k : \mathbb{T} \to \operatorname{cl}(\mathbb{D})$ jest funkcją mierzalną oraz $f(T_k) \subset D_k$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Ponieważ $F^*(z) = f(z)$ dla p.w. $z \in \mathbb{T}$, więc z dowodu lematu 2.9 wynika, że ciąg $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto c_k := \frac{1}{p_k(z)} \operatorname{P}[f \cdot \chi_{T_k}](z) \in D_k$ spełnia równość

$$
F(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k \operatorname{P}[\chi_{T_k}](z). \qquad (3.10)
$$

Stąd wynika własność (i). Z lematu 2.10 wynika zaś, że

$$
\tilde{F} := \sum_{k=1}^{n} c_k \operatorname{P}[\chi_{T_k}] \in \mathcal{F}_\theta. \qquad (3.11)
$$

Konsekwencją wzoru (3.11) i równości (3.10) jest równość

$$
\tilde{F}(z) = F(z). \qquad (3.12)
$$

Na mocy wzoru (3.3) mamy

$$n \cdot p(z) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k(z) = 1,$$

co wobec równości (3.9) oraz nierówności $p(z) > 0$ i $S > 0$ daje

$$|F(z)| = 1 - (n - S)p(z) > 1 - np(z) \geqslant 0.$$

Stąd $F(z) \neq 0$ i możemy przyjąć $u := \frac{F(z)}{|F(z)|}$, co daje równość (ii). Stosując (3.8) dostajemy na mocy (3.9),

$$|\tilde{F}(z)| \leqslant 1 - np(z) + p(z) \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}(\bar{u}c_k) \leqslant 1 - np(z) + p(z)S = |F(z)|. \tag{3.13}$$

To łącznie z (3.12) daje równości

$$|F(z)| = |\tilde{F}(z)| = 1 - np(z) + p(z) \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}(\bar{u}c_k) = 1 - np(z) + p(z)S. \tag{3.14}$$

Ponieważ $p(z) > 0$, więc $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}(\bar{u}c_k) = S$, co daje równość (iii). Ponadto stosując (3.3) i (3.6) dostajemy na podstawie (3.14),

$$\begin{aligned} |\tilde{F}(z)| &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}(\bar{u}c_k)p_k(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{Re}(\bar{u}c_k) - 1)p_k(z) \\ &\leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{Re}(\bar{u}c_k) - 1)p(z) \\ &= 1 - np(z) + p(z) \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}(\bar{u}c_k) = |\tilde{F}(z)|. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Stąd

$$\sum_{k=1}^{n} (\operatorname{Re}(\overline{u}c_k) - 1)\, p_k(z) = \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{Re}(\overline{u}c_k) - 1)\, p(z),$$

i w konsekwencji

$$\sum_{k=1}^{n} (1 - \operatorname{Re}(\overline{u}c_k))\, (p_k(z) - p(z)) = 0.$$

Ponieważ $(1 - \operatorname{Re}(\overline{u}c_k)) \geqslant 0$ i $p_k(z) - p(z) \geqslant 0$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$, więc

$$(1 - \operatorname{Re}(\overline{u}c_k))\, (p_k(z) - p(z)) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_{1,n},$$

a to dowodzi własności (iv). Ponieważ $F \in \mathcal{F}_\theta$, więc na mocy (1.13), $F = \mathrm{P}[F^*] = \mathrm{P}[f]$, co daje własność (v). Pozostaje wykazać, że

$$c_k \in \operatorname{fr}(D_k), \quad k \in \mathbb{Z}_{1,n}. \tag{3.16}$$

Ustalmy dowolnie $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$ i załóżmy, że $c_k \in \operatorname{int}(D_k)$. Wówczas istnieje $r > 0$ taki, że $\mathbb{D}(c_k, r) \subset D_k$. Przyjmując więc $v_l := c_l$ dla $l \in \mathbb{Z}_{1,n} \setminus \{k\}$ oraz $v_k := c_k + \frac{1}{2}ru$ widzimy, że $v_l \in D_l$ dla $l \in \mathbb{Z}_{1,n}$, skąd na mocy wzoru (3.2) i własności (iii),

$$\begin{aligned} S &\geqslant \operatorname{Re}\Big(\bar{u}\sum_{l=1}^{n} v_l\Big) = \operatorname{Re}\Big(\bar{u}\sum_{k\neq l=1}^{n} v_l + \bar{u}v_k\Big) = \operatorname{Re}\Big(\bar{u}\sum_{k\neq l=1}^{n} c_l + \bar{u}\Big(c_k + \frac{1}{2}ru\Big)\Big) \\ &= \operatorname{Re}\Big(\bar{u}\sum_{l=1}^{n} c_l + \frac{1}{2}r|u|^2\Big) = \operatorname{Re}\Big(\bar{u}\sum_{l=1}^{n} c_l\Big) + \frac{1}{2}r = S + \frac{1}{2}r. \end{aligned}$$

Zatem $r \leqslant 0$, co daje sprzeczność. Dlatego $c_k \in D_k \setminus \operatorname{int}(D_k) = \operatorname{fr}(D_k)$, co dowodzi własności (3.16).

Na odwrót, załóżmy istnienie $u \in \mathbb{T}$, funkcji mierzalnej $f : \mathbb{T} \to \operatorname{cl}(\mathbb{D})$ i ciągu $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto c_k \in \operatorname{fr}(D_k)$ spełniających warunki (i)-(v). Wówczas na mocy warunku (v), $F = \mathrm{P}[f]$, a więc $F \in \operatorname{Har}(\mathbb{D})$. Stąd dla każdego $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$ wynika na mocy warunku (i), że $F^*(z) = f(z) \in D_k$ dla p.w. $z \in T_k$. Dlatego $F \in \mathcal{F}_\theta$. Z warunku (i) dostajemy również

$$F(z) = \mathrm{P}[f](z) = \mathrm{P}\Big[\sum_{k=1}^{n} f \cdot \chi_{T_k}\Big](z) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}[f \cdot \chi_{T_k}](z) = \sum_{k=1}^{n} c_k p_k(z).$$

Stąd na mocy warunku (ii) otrzymujemy

$$|F(z)| = \overline{u}F(z) = \operatorname{Re}(\overline{u}F(z)) = \operatorname{Re}\Big(\overline{u}\sum_{k=1}^{n} c_k p_k(z)\Big) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}(\overline{u}c_k)p_k(z). \tag{3.17}$$

Biorąc pod uwagę równość $\sum_{k=1}^{n} p_k(z) = 1$ dostajemy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}(\overline{u}c_k)p_k(z) &= \sum_{k=1}^{n}(\operatorname{Re}(\overline{u}c_k) - 1 + 1)p_k(z) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n}(\operatorname{Re}(\overline{u}c_k) - 1)p_k(z). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Warunek (iv) implikuje

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(\operatorname{Re}(\overline{u}c_k) - 1)p_k(z) &= \sum_{k=1}^{n}(\operatorname{Re}(\overline{u}c_k) - 1)p(z) = p(z)\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}(\overline{u}c_k) - \sum_{k=1}^{n} p(z) \\ &= p(z)\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}(\overline{u}c_k) - np(z). \end{aligned}$$

To łącznie z (3.17) i (3.18) prowadzi na mocy warunku (iii) do równości

$$\begin{aligned} |F(z)| &= 1 + p(z)\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}(\overline{u}c_k) - np(z) \\ &= 1 + p(z)S - np(z) = 1 - (n - S)p(z). \end{aligned}$$

Zatem równość w (3.1) zachodzi, co kończy dowód. □

Oszacowanie (3.1) jest użyteczne, o ile możemy oszacować $p(z)$ od dołu i S od góry. Wartość $p(z)$ została oszacowana od dołu w podrozdziale 2.1; por. wniosek 2.5. Przejdźmy więc do szacowania od góry wielkości S danej wzorem (3.2). W tym celu dla dowolnie zadanego $n \in \mathbb{N}$ określamy funkcję

$$\left(0; \frac{\pi}{n}\right] \ni \delta \mapsto \rho_n(\delta) := \sup(A_\delta), \tag{3.19}$$

gdzie A_δ jest zbiorem $s \in \mathbb{R}$, dla których istnieją $\theta \in \mathcal{P}_n$ oraz ciąg $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto z_k \in \mathrm{D}_k(\theta)$ spełniające równości $\delta_\theta = \delta$ i

$$s = \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k\Big). \tag{3.20}$$

Lemat 3.2. *Dla każdego $\theta \in \mathcal{P}_n$ zachodzi nierówność*

$$S \leqslant \rho_n(\delta), \tag{3.21}$$

gdzie S jest liczbą określoną wzorem (3.2) *i $\delta := \delta_\theta$.*

Dowód. Ustalmy dowolnie $\theta \in \mathcal{P}_n$, $u \in \mathbb{T}$ oraz ciąg $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto v_k \in D_k := \mathrm{D}_k(\theta)$. Wtedy $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\theta' := \theta - \alpha \in \mathcal{P}_n$. Przyjmując $z_k := \overline{u} \cdot v_k$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$ widzimy, że $z_k \in D'_k := \overline{u} D_k = \mathrm{D}_k(\theta')$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Ponieważ $\theta' \in \mathcal{P}_n$ i $\delta_{\theta'} = \delta_\theta = \delta$, więc na mocy wzoru (3.19) oraz równości (3.20) dostajemy

$$\mathrm{Re}\Big(\overline{u} \sum_{k=1}^{n} v_k\Big) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) \leqslant \rho_n(\delta). \tag{3.22}$$

Ponieważ nierówność (3.22) nie zależy od wyboru $u \in \mathbb{T}$ i ciągu $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto v_k \in D_k$, więc ze wzoru (3.2) wynika nierówność (3.21), co kończy dowód. □

Wniosek 3.3. *Dla dowolnego $\theta \in \mathcal{P}_n$ zachodzą oszacowania*

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leqslant 1 - (n - \rho_n(\delta))p(z) \\ &\leqslant 1 - \frac{1}{\pi}(n - \rho_n(\delta))\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{|z| + \cos(\delta)}\right) - \delta\right), \quad F \in \mathcal{F}_\theta,\ z \in \mathbb{D}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

gdzie $p(z) := \min(\{\mathrm{P}[\chi_{T_k}](z) :\ k \in \mathbb{Z}_{1,n}\})$, $T_k := \mathrm{T}_k(\theta)$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$ i $\delta := \delta_\theta$.

Dowód. Niech $\theta \in \mathcal{P}_n$ będzie dowolnie ustalone. Z lematu 3.2 wynika nierówność (3.21). Stąd na mocy twierdzenia 3.1 otrzymujemy

$$|F(z)| \leqslant 1 - (n - S) \cdot p(z), \quad F \in \mathcal{F}_\theta,\ z \in \mathbb{D}, \tag{3.24}$$

gdzie $p(z) := \min\left(\{\mathrm{P}[\chi_{T_k}](z) : k \in \mathbb{Z}_{1,n}\}\right)$. Z nierówności (3.21) otrzymujemy nierówność $n - S \geqslant n - \rho_n(\delta)$, która łącznie z oszacowaniem (2.12) prowadzi do

$$1 - (n - S) \cdot p(z) \leqslant 1 - \frac{1}{\pi}(n - \rho_n(\delta))\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{|z| + \cos(\delta)}\right) - \delta\right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

To wraz z oszacowaniem (3.24) implikuje oszacowania (3.23). □

3.2 Oszacowania dla partycji z dowolną ilością łuków

W tym podrozdziale rozważamy przypadek podziału okręgu jednostkowego na n łuków o dowolnej długości.

Lemat 3.4. *Dla dowolnych* $\alpha, \beta, t \in \mathbb{R}$*, jeśli* $0 \leqslant \alpha \leqslant t \leqslant \beta \leqslant 2\pi$ *to*

$$\cos(t) \leqslant \max(\{\cos(\alpha), \cos(\beta)\}). \tag{3.25}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie $\alpha, \beta, t \in \mathbb{R}$ spełniające nierówności $0 \leqslant \alpha \leqslant t \leqslant \beta \leqslant 2\pi$. Jeśli $t \leqslant \pi$ to $\cos(t) \leqslant \cos(\alpha)$. Jeśli $\pi \leqslant t$ to $\cos(t) \leqslant \cos(\beta)$. W obu przypadkach dostajemy nierówność (3.25). □

Lemat 3.5. *Dla dowolnych* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, jeśli* $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi$ *to*

$$\operatorname{Re} z \leqslant \max(\{\cos(\alpha), \cos(\beta), 0\}), \quad z \in D := \operatorname{conv}(T \cup \{0\}), \tag{3.26}$$

gdzie $T := \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} : t \in [\alpha; \beta]\}$.

Dowód. Ustalmy dowolnie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takie, że $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi$, oraz $z \in D$. Załóżmy, że $|T|_1 \leqslant \pi$. Wtedy $D = \{ru : r \in [0; 1] \wedge u \in T\}$, a więc $z = r \cdot u$ dla pewnych $r \in [0; 1]$ i $u \in T$. Stąd $|z| = r \cdot |u| = r$, i w konsekwencji $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ dla pewnego $t \in [\alpha; \beta]$. Wtedy

$$\operatorname{Re} z = |z| \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = |z| \cos(t).$$

Jeśli $\cos(t) \leqslant 0$ to $\operatorname{Re} z \leqslant 0$. Jeśli zaś $\cos(t) > 0$ to na mocy lematu 3.4, $\operatorname{Re} z \leqslant \cos(t) \leqslant \max(\{\cos(\alpha), \cos(\beta)\})$. Zatem

$$\operatorname{Re} z \leqslant M := \max(\{\cos(\alpha), \cos(\beta), 0\}). \tag{3.27}$$

Załóżmy teraz, że $|T|_1 > \pi$. Wtedy $D = D' \cup D''$, gdzie

$$D' := \{ru : r \in [0; 1] \wedge u \in T\} \quad \text{oraz} \quad D'' := \operatorname{conv}(\{0, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\}).$$

Jeśli $z \in D'$ to $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ dla pewnego $t \in [\alpha; \beta]$, co — analogicznie jak w przypadku $|T|_1 \leqslant \pi$ — daje nierówność (3.27). Jeśli $z \in D''$ to $z = \lambda_0 \cdot 0 + \lambda_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \lambda_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ dla pewnego ciągu $\mathbb{Z}_{0,2} \ni k \mapsto \lambda_k \in [0; 1]$ spełniającego równość $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, skąd

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} z &= \lambda_1 \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \lambda_2 \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = \lambda_1 \cos(\alpha) + \lambda_2 \cos(\beta) \\ &\leqslant \lambda_0 \cdot M + \lambda_1 \cdot M + \lambda_2 \cdot M = (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \cdot M = M.\end{aligned}$$

Zatem w każdym przypadku $\operatorname{Re} z \leqslant M$, czego należało dowieść. □

Twierdzenie 3.6. *Dla dowolnego* $\theta \in \mathcal{P}_n$ *takiego, że* $\theta_0 \leqslant 0 < \theta_1$ *oraz dla każdego ciągu* $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto z_k \in D_k := \mathrm{D}_k(\theta)$ *zachodzi nierówność*

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \max(\{\cos(\theta_k), \cos(\theta_{k-1}), 0\}). \tag{3.28}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie $\theta \in \mathcal{P}_n$. Przy założeniach twierdzenia widzimy na mocy lematu 3.5, że

$$\operatorname{Re} z_k \leqslant \max(\{\cos(\theta_k), \cos(\theta_{k-1}), 0\}), \quad k \in \mathbb{Z}_{2,n}, \tag{3.29}$$

gdyż $0 < \theta_{k-1} < \theta_k \leqslant 2\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}_{2,n}$. Ponieważ $\operatorname{Re} z_1 \leqslant 1$, więc stosując nierówności (3.29) dostajemy nierówność (3.28), co kończy dowód. □

Wniosek 3.7. *Dla dowolnego* $\theta \in \mathcal{P}_n$ *takiego, że* $\theta_0 \leqslant 0 < \theta_1$ *oraz dla każdego ciągu* $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto z_k \in D_k := \mathrm{D}_k(\theta)$ *zachodzi nierówność*

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) &\leqslant 1 + \max(\{\cos(\theta_1 + 2\delta), \cos(\theta_0), \cos(\theta_0 - 2\delta), 0\}) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n-1} \max(\{\cos(\theta_1 + 2(k-2)\delta), \cos(\theta_0 - 2(n-k)\delta), 0\}).\end{aligned} \tag{3.30}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie $\theta \in \mathcal{P}_n$. Przy założeniach twierdzenia widzimy, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}_{3,n}$,

$$\theta_{k-1} = \sum_{l=2}^{k-1} (\theta_l - \theta_{l-1}) + \theta_1 \geqslant (k-2) \cdot 2\delta + \theta_1$$

oraz dla każdego $k \in \mathbb{Z}_{1,n-1}$,

$$\theta_k = \theta_n - \sum_{l=k+1}^{n} (\theta_l - \theta_{l-1}) \leqslant \theta_n - (n-k) \cdot 2\delta = \theta_0 + 2\pi - (n-k) \cdot 2\delta.$$

Zatem

$$\theta_1 + 2(k-2)\delta \leqslant \theta_{k-1} < \theta_k \leqslant 2\pi + \theta_0 - 2(n-k)\delta, \quad k \in \mathbb{Z}_{2,n}. \tag{3.31}$$

Z lematu 3.5 wynika, że

$$\operatorname{Re} z_k \leqslant M_k := \max(\{\cos(\theta_{k-1}), \cos(\theta_k), 0\}), \quad k \in \mathbb{Z}_{2,n}. \tag{3.32}$$

Ponieważ

$$\theta_{n-1} \geqslant \theta_1 + 2(n-2)\delta \geqslant \theta_1 + 2\delta > 2\delta$$

oraz

$$\theta_{n-1} \leqslant \theta_n - 2\delta = \theta_0 + 2\pi - 2\delta \leqslant 2\pi - 2\delta,$$

więc na mocy lematu 3.4, $\cos(\theta_{n-1}) \leqslant \max(\{\cos(\theta_1 + 2\delta), \cos(\theta_0 - 2\delta)\}$. To łącznie z (3.32) i równością $\theta_n = 2\pi + \theta_0$ daje

$$\operatorname{Re} z_n \leqslant \max(\{\cos(\theta_1 + 2\delta), \cos(\theta_0), \cos(\theta_0 - 2\delta), 0\}). \tag{3.33}$$

Korzystając ponownie z lematu 3.4 wyprowadzamy z nierówności (3.31),

$$\begin{aligned} \cos(\theta_k) \leqslant M'_k &:= \max(\{\cos(\theta_1 + 2(k-2)\delta), \cos(2\pi + \theta_0 - 2(n-k)\delta), 0\}) \\ &= \max(\{\cos(\theta_1 + 2(k-2)\delta), \cos(\theta_0 - 2(n-k)\delta), 0\}), \quad k \in \mathbb{Z}_{2,n-1} \end{aligned} \tag{3.34}$$

oraz analogicznie $\cos(\theta_{k-1}) \leqslant M'_k$ dla $k \in \mathbb{Z}_{2,n-1}$. To wraz z (3.32) i (3.34) prowadzi do

$$\operatorname{Re} z_k \leqslant \max(\{M'_k, 0\}) = \max(\{\cos(\theta_1 + 2(k-2)\delta), \cos(\theta_0 - 2(n-k)\delta), 0\}),\ k \in \mathbb{Z}_{2,n-1}.$$

Stąd oraz z nierówności (3.33) i $\operatorname{Re} z_1 \leqslant 1$ otrzymujemy oszacowanie (3.30), co kończy dowód. □

Wniosek 3.8. *Dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_n$ i ciągu $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto z_k \in D_k := \mathrm{D}_k(\theta)$, jeśli $\theta_0 \leqslant 0 < \theta_1$ to*

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) \leqslant 2 + \frac{\sin(N(n,\delta)\cdot\delta)}{\sin(\delta)}, \tag{3.35}$$

gdzie $N(n,\delta) := \min\left(\left\{\operatorname{Ent}\left(\frac{\pi}{2\delta}\right), n-2\right\}\right)$ i $\delta := \delta_\theta$.

Dowód. Ustalmy dowolnie $\theta \in \mathcal{P}_n$ i ciąg $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto z_k \in D_k$ oraz załóżmy, że $\theta_0 \leqslant 0 < \theta_1$. Przyjmijmy

$$A := \{k \in \mathbb{Z}_{2,n} : \cos(\theta_{k-1}) \geqslant \max(\{\cos(\theta_k), 0\})\}$$

oraz

$$B := \{k \in \mathbb{Z}_{2,n} : \cos(\theta_k) > \max(\{\cos(\theta_{k-1}), 0\})\}.$$

Jeśli istnieje $k \in A \cap B$ to $\cos(\theta_{k-1}) \geqslant 0$ i $\cos(\theta_k) > 0$, skąd

$$\cos(\theta_{k-1}) \geqslant \cos(\theta_k) \quad \text{i} \quad \cos(\theta_k) > \cos(\theta_{k-1}),$$

a to jest niemożliwe. Dlatego $A \cap B = \emptyset$ i $A \cup B \subset \mathbb{Z}_{2,n}$. Niech $p := \overline{\overline{A}}$ i $q := \overline{\overline{B}}$. Ponieważ θ jest ciągiem rosnącym, $\theta_0 \leqslant 0 < \theta_1$ i $\theta_n = \theta_0 + 2\pi$, więc z nierówności (3.31) mamy

$$\max(\{\cos(\theta_k), \cos(\theta_{k-1}), 0\}) = \cos(\theta_{k-1}) \leqslant \cos(\theta_1 + 2(k-2)\delta), \quad k \in A, \tag{3.36}$$

oraz

$$\max(\{\cos(\theta_k), \cos(\theta_{k-1}), 0\}) = \cos(\theta_k) \leqslant \cos(\theta_n - 2(n-k)\delta), \quad k \in B. \tag{3.37}$$

Stąd

$$\sum_{k=2}^{n}\max(\{\cos(\theta_k),\cos(\theta_{k-1}),0\}) \leqslant \sum_{k\in A}\cos(\theta_1+2(k-2)\delta) + \sum_{k\in B}\cos(\theta_n-2(n-k)\delta). \tag{3.38}$$

Tu i w dalszym ciągu przyjmujemy $\sum_{k\in\emptyset}(...) := 0$. Ponieważ $\theta_0 \leqslant 0 < \theta_1$ i $\theta_n = 2\pi+\theta_0$, więc

$$\sum_{k\in A}\cos(\theta_1+2(k-2)\delta) \leqslant \sum_{k\in A}\cos(2(k-2)\delta) \tag{3.39}$$

oraz

$$\sum_{k\in B}\cos(\theta_n-2(n-k)\delta) \leqslant \sum_{k\in B}\cos(2(n-k)\delta). \tag{3.40}$$

Załóżmy najpierw, że $A \neq \emptyset \neq B$. Wtedy $p, q \geqslant 1$. Z nierówności (3.39) wynika, że

$$\begin{aligned}\sum_{k\in A}\cos(\theta_1+2(k-2)\delta) &\leqslant \sum_{k\in A}\cos(2(k-2)\delta) = \sum_{k=2}^{p+1}\cos(2(k-2)\delta)\\ &= \sum_{k=0}^{p-1}\cos(2k\delta) = \frac{\sin(p\delta)\cos((p-1)\delta)}{\sin(\delta)},\end{aligned} \tag{3.41}$$

zaś z nierówności (3.40) dostajemy

$$\begin{aligned}\sum_{k\in B}\cos(\theta_n-2(n-k)\delta) &\leqslant \sum_{k\in B}\cos(2(n-k)\delta) = \sum_{k=n-q+1}^{n}\cos(2(n-k)\delta)\\ &= \sum_{k=0}^{q-1}\cos(2k\delta) = \frac{\sin(q\delta)\cos((q-1)\delta)}{\sin(\delta)}.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Nierówności (3.38), (3.41) i (3.42) dają łącznie

$$\sum_{k=2}^{n}\max(\{\cos(\theta_k),\cos(\theta_{k-1}),0\}) \leqslant \frac{\sin(p\delta)\cos((p-1)\delta)}{\sin(\delta)}+\frac{\sin(q\delta)\cos((q-1)\delta)}{\sin(\delta)}. \tag{3.43}$$

Korzystając z tożsamości

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R},$$

dostajemy

$$\begin{aligned}&\sin(p\delta)\cos((p-1)\delta)+\sin(q\delta)\cos((q-1)\delta)\\ &\quad= \frac{1}{2}\left[\sin((2p-1)\delta)+\sin(\delta)+\sin((2q-1)\delta)+\sin(\delta)\right]\\ &\quad= \sin(\delta)+\frac{1}{2}\left[\sin((2p-1)\delta)+\sin((2q-1)\delta)\right]\\ &\quad= \sin(\delta)+\sin((p+q-1)\delta)\cos((p-q)\delta) \leqslant \sin(\delta)+\sin((p+q-1)\delta),\end{aligned} \tag{3.44}$$

gdyż $0 < (p+q-1)\delta < n\delta \leqslant \pi$. Ponieważ $\overline{\overline{A}} = p$, więc $p+1 \in A$. Stąd $\cos(\theta_p) \geqslant 0$, czyli $\theta_p \leqslant \frac{\pi}{2}$ lub $\theta_p \geqslant \frac{3\pi}{2}$. Jeśli $\theta_p \geqslant \frac{3\pi}{2}$ to wobec nierówności $\theta_p < \theta_{p+1} \leqslant 2\pi$ mamy $\cos(\theta_p) < \cos(\theta_{p+1})$, a więc $p+1 \notin A$. Dlatego $\theta_p \leqslant \frac{\pi}{2}$, skąd na mocy (3.31),

$$\theta_1 + 2(p-1)\delta \leqslant \theta_p \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{3.45}$$

Ponieważ $\overline{\overline{B}} = q$, więc $n-q+1 \in B$. Stąd $\cos(\theta_{n-q+1}) > 0$, czyli $\theta_{n-q+1} < \frac{\pi}{2}$ lub $\theta_{n-q+1} > \frac{3\pi}{2}$. Jeśli $\theta_{n-q+1} < \frac{\pi}{2}$ to wobec nierówności $0 < \theta_{n-q} < \theta_{n-q+1} < \frac{\pi}{2}$ mamy $\cos(\theta_{n-q}) > \cos(\theta_{n-q+1})$, a więc $n-q+1 \notin B$. Dlatego $\theta_{n-q+1} > \frac{3\pi}{2}$, skąd na mocy nierówności (3.31),

$$\frac{3\pi}{2} < \theta_{n-q+1} \leqslant 2\pi + \theta_0 - 2(n-(n-q+1))\delta = 2\pi + \theta_0 - 2(q-1)\delta.$$

Stąd

$$-\theta_0 + 2(q-1)\delta < \frac{\pi}{2}. \tag{3.46}$$

Ponieważ $2\delta \leqslant \theta_1 - \theta_0$, więc z nierówności (3.45) i (3.46) wynika, że

$$2\delta + 2(p+q-2)\delta \leqslant \theta_1 - \theta_0 + 2(p-1)\delta + 2(q-1)\delta < \pi,$$

skąd $p+q-1 < \frac{\pi}{2\delta}$. Ponadto $p+q = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \cup B}} \leqslant \overline{\overline{\mathbb{Z}_{2,n}}} = n-1$, co daje

$$p+q-1 \leqslant N(n,\delta). \tag{3.47}$$

Stąd $(p+q-1)\delta \leqslant N(n,\delta)\cdot\delta \leqslant \mathrm{Ent}\left(\frac{\pi}{2\delta}\right)\cdot\delta \leqslant \frac{\pi}{2\delta}\cdot\delta = \frac{\pi}{2}$, co łącznie z (3.44) daje

$$\sin(p\delta)\cos((p-1)\delta) + \sin(q\delta)\cos((q-1)\delta) \leqslant \sin(\delta) + \sin(N(n,\delta)\cdot\delta).$$

To łącznie z nierównością (3.43) implikuje nierówność

$$\sum_{k=2}^{n} \max(\{\cos(\theta_k), \cos(\theta_{k-1}), 0\}) \leqslant 1 + \frac{\sin(N(n,\delta)\cdot\delta)}{\sin(\delta)}.$$

Stąd na mocy twierdzenia 3.6 otrzymujemy nierówność (3.35), gdy $A \neq \emptyset \neq B$.

Załóżmy teraz, że $A \neq \emptyset = B$. Wtedy $p \geqslant 1$ i $q = 0$. Z nierówności (3.45) wynika, że

$$(p-1)\delta < \theta_1 + (p-1)\delta \leqslant \theta_1 + 2(p-1)\delta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Stąd $p-1 < \frac{\pi}{2\delta}$, a więc $p-1 \leqslant \mathrm{Ent}\left(\frac{\pi}{2\delta}\right)$. Ponadto $p-1 \leqslant n-2$. Dlatego $p-1 \leqslant N(n,\delta)$, i w konsekwencji

$$\begin{aligned}
\sin(p\delta)\cos((p-1)\delta) &= \frac{1}{2}\sin((2p-1)\delta) + \frac{1}{2}\sin(\delta) \\
&= \frac{1}{2}\sin((2p-1)\delta) + \frac{1}{2}\sin(-\delta) + \sin(\delta) \\
&= \sin((p-1)\delta)\cos(p\delta) + \sin(\delta) < \sin(\delta) + \sin((p-1)\delta) \\
&\leqslant \sin(\delta) + \sin(N(n,\delta)\cdot\delta),
\end{aligned}$$

co łącznie z nierównościami (3.38) i (3.41) daje

$$\sum_{k=2}^{n} \max(\{\cos(\theta_k), \cos(\theta_{k-1}), 0\}) \leqslant \frac{\sin(p\delta)\cos((p-1)\delta)}{\sin(\delta)} < 1 + \frac{\sin(N(n,\delta)\cdot\delta)}{\sin(\delta)}.$$

Korzystając z twierdzenia 3.6 otrzymujemy nierówność (3.35), gdy $A \neq \emptyset = B$.

Zamieniając w powyższym rozumowaniu p z q i zastępując nierówności (3.41) i (3.45) przez nierówności (3.42) i (3.46), odpowiednio, wyprowadzamy oszacowanie (3.35) w przypadku, gdy $A = \emptyset \neq B$. Jeśli $A = \emptyset = B$ to

$$\sum_{k=2}^{n} \max(\{\cos(\theta_k), \cos(\theta_{k-1}), 0\}) = 0.$$

Zatem nierówność (3.35) zachodzi w każdym przypadku, co kończy dowód. □

Definicja 3.9. Permutację σ zbioru $\mathbb{Z}_{1,n}$ nazywamy *obrotową* $:\Leftrightarrow$ istnieje $p \in \mathbb{Z}_{0,n-1}$ o tej własności, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$,

$$\sigma(k) = \begin{cases} k+p, & \text{gdy } k+p \leqslant n, \\ k+p-n, & \text{gdy } k+p > n, \end{cases} \tag{3.48}$$

bądź równoważnie

$$\sigma(k) = k + p - n\,\mathrm{Ent}\left(\frac{k-1+p}{n}\right), \quad k \in \mathbb{Z}_{1,n}. \tag{3.49}$$

Wniosek 3.10. *Dla każdego $n \in \mathbb{Z}_3$ zachodzi nierówność*

$$\rho_n(\delta) \leqslant 2 + \frac{\sin(N(n,\delta)\cdot\delta)}{\sin(\delta)}, \quad \delta \in \left(0; \frac{\pi}{n}\right], \tag{3.50}$$

gdzie $N(n,\delta) := \min\left(\left\{\mathrm{Ent}\left(\frac{\pi}{2\delta}\right), n-2\right\}\right)$.

Dowód. Ustalmy dowolnie $n \in \mathbb{Z}_3$ i $\delta \in \left(0; \frac{\pi}{n}\right]$. Z określenia zbioru A_δ wynika, że dla dowolnie zadanego $s \in A_\delta$ istnieją $\theta \in \mathcal{P}_n$ oraz ciąg $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto z_k \in \mathrm{D}_k(\theta)$ spełniające równości $\delta_\theta = \delta$ i (3.20). Istnieją wówczas permutacja obrotowa σ zbioru $\mathbb{Z}_{1,n}$ oraz $\tilde{\theta} \in \mathcal{P}_n$ o tej własności, że $\tilde{\theta}_0 \leqslant 0 < \tilde{\theta}_1$ i $\mathrm{T}_{\sigma(k)}(\theta) = \mathrm{T}_k(\tilde{\theta})$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Stąd $z_{\sigma(k)} \in \mathrm{D}_{\sigma(k)}(\theta) = \mathrm{D}_k(\tilde{\theta})$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Ponieważ $\delta_{\tilde{\theta}} = \delta_\theta = \delta$, więc na mocy wniosku 3.8,

$$s = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_{\sigma(k)}\right) \leqslant 2 + \frac{\sin(N(n,\delta)\cdot\delta)}{\sin(\delta)}.$$

To wobec wzoru (3.19) implikuje nierówność (3.50), co kończy dowód. □

Twierdzenie 3.11. *Dla każdego $\theta \in \mathcal{P}_n$ zachodzi oszacowanie*

$$|F(z)| \leqslant 1 - \frac{1}{\pi}\left(n - 2 - \frac{\sin(N(n,\delta)\cdot\delta)}{\sin(\delta)}\right)\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{|z| + \cos(\delta)}\right) - \delta\right), \quad F \in \mathcal{F}_\theta,\ z \in \mathbb{D}, \tag{3.51}$$

gdzie $N(n,\delta) := \min\left(\left\{\operatorname{Ent}\left(\frac{\pi}{2\delta}\right), n-2\right\}\right)$ *i* $\delta := \delta_\theta$.

Dowód. Ustalmy dowolnie $\theta \in \mathcal{P}_n$. Z wniosku 3.3 wynika, że

$$|F(z)| \leqslant 1 - \frac{1}{\pi}(n - \rho_n(\delta))\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{|z| + \cos(\delta)}\right) - \delta\right), \quad F \in \mathcal{F}_\theta,\ z \in \mathbb{D},$$

zaś z wniosku 3.10 dostajemy

$$n - \rho_n(\delta) \geqslant n - 2 - \frac{\sin(N(n,\delta)\cdot\delta)}{\sin(\delta)}.$$

Obie nierówności implikują oszacowanie (3.51), co kończy dowód. □

Uwaga 3.12. Załóżmy, że $\theta \in \mathcal{P}_n$ odpowiada partycji złożonej z n łuków o jednakowej długości, czyli $\theta_k - \theta_{k-1} = \frac{2\pi}{n}$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Wtedy $\delta_\theta = \frac{\pi}{n}$, i na podstawie wniosku 3.10, $\rho_n\left(\frac{\pi}{n}\right) \leqslant 2 + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$, gdyż $N\left(n, \frac{\pi}{n}\right) = \min\left(\left\{\operatorname{Ent}\left(\frac{n}{2}\right), n-2\right\}\right) = \operatorname{Ent}\left(\frac{n}{2}\right) \leqslant \frac{n}{2}$. Stąd na mocy wniosku 3.3 otrzymujemy

$$|F(z)| \leqslant 1 - \frac{1}{\pi}\left(n - 2 - \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)\cdot\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{|z| + \cos(\frac{\pi}{n})}\right) - \frac{\pi}{n}\right), \quad F \in \mathcal{F}_\theta,\ z \in \mathbb{D}.$$

Uwaga 3.13. Dla dowolnie zadanych $n \in \mathbb{Z}_4$ i $\theta \in \mathcal{P}_n$ załóżmy, że

$$\Delta := \max(\{\theta_k - \theta_{k-1} : k \in \mathbb{Z}_{1,n}\}) \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad N := \operatorname{Ent}\left(\frac{\pi}{2\Delta}\right) \geqslant 1.$$

W [7, Example 3.5] zostało wykazane, że dla każdego ciągu $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto z_k \in \mathrm{D}_k(\theta)$ i każdego $u \in \mathbb{T}$ zachodzi nierówność

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{u} z_k\right) \leqslant n + 1 - 4N + 2\frac{\sin\left(\frac{(N+1)\Delta}{2}\right)\sin\left(\frac{N\Delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta}{2}\right)}.$$

Stąd na mocy twierdzenia 3.1,

$$|F(z)| \leqslant 1 - \left(4N - 1 - 2\frac{\sin\left(\frac{(N+1)\Delta}{2}\right)\sin\left(\frac{N\Delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta}{2}\right)}\right)p(z), \quad F \in \mathcal{F}_\theta\,,\ z \in \mathbb{D},$$

gdzie wielkość $p(z)$ jest określona wzorem (3.3). Wniosek 2.5 prowadzi do oszacowania typu radialnego

$$|F(z)| \leqslant 1 - \left(4N - 1 - 2\frac{\sin\left(\frac{(N+1)\Delta}{2}\right)\sin\left(\frac{N\Delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta}{2}\right)}\right) \mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](|z|), \quad F \in \mathcal{F}_\theta, \ z \in \mathbb{D},$$

gdzie $\delta := \delta_\theta$. W szczególności, jeśli punkty $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$, $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$, są wierzchołkami n-kąta foremnego, to

$$\Delta = \frac{2\pi}{n} \quad \text{i} \quad \delta = \frac{\pi}{n}.$$

Wtedy $N \in \mathbb{N}$ i $j := n - 4N \in \mathbb{Z}_{0,3}$, i w konsekwencji

$$|F(z)| \leqslant 1 - \left(n - j - 1 - 2\frac{\sin\left(\frac{n-j+4}{4} \cdot \frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{n-j}{4} \cdot \frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right) p(z), \quad F \in \mathcal{F}_\theta, \ \ z \in \mathbb{D},$$

oraz

$$|F(z)| \leqslant 1 - \left(n - j - 1 - 2\frac{\sin\left(\frac{n-j+4}{4} \cdot \frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{n-j}{4} \cdot \frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right) \cdot \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{|z| + \cos(\frac{\pi}{n})}\right) - \frac{1}{n}\right), \quad F \in \mathcal{F}_\theta, \ \ z \in \mathbb{D}.$$

3.3 Oszacowania dla partycji z trzema łukami

W tym podrozdziale rozważamy przypadek podziału okręgu jednostkowego na trzy łuki o dowolnej długości.

Lemat 3.14. *Dla każdego $\theta \in \mathcal{P}_3$ i każdego ciągu $\mathbb{Z}_{1,3} \ni k \mapsto z_k \in D_k := \mathrm{D}_k(\theta)$, jeśli $\theta_0 \leqslant 0 < \theta_1$ to zachodzi nierówność*

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2 + z_3) \leqslant 1 + 2\cos(\delta), \tag{3.52}$$

gdzie $\delta := \delta_\theta$. Ponadto równość w (3.52) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z następujących warunków:

(i) $z_1 = 1, \ z_2 = 0, \ z_3 = 1$ *oraz* $\theta_0 = 0, \ \theta_1 = \frac{2\pi}{3}$ *i* $\theta_2 = \frac{4\pi}{3}$*;*

(ii) $z_1 = 1, \ z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}, \ z_3 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}$ *oraz* $\theta_0 = -\delta$ *i* $\theta_1 = \delta$.

Dowód. Ustalmy dowolnie $\theta \in \mathcal{P}_3$ taki, że $\theta_0 \leqslant 0 < \theta_1$, oraz ciąg $\mathbb{Z}_{1,3} \ni k \mapsto z_k \in D_k$. Z twierdzenia 3.6 wynika, że

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2 + z_3) \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{3} \max(\{\cos(\theta_k), \cos(\theta_{k-1}), 0\}) = 1 + S, \tag{3.53}$$

gdzie $S := \sum_{k=2}^{3} \max(\{\cos(\theta_k), \cos(\theta_{k-1}), 0\})$. Mogą zajść następujące przypadki.
Przypadek I, gdy $\theta_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ i $\cos(\theta_2) \geqslant \cos(\theta_3)$. Wtedy

$$S = \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) < 1 + \cos(2\delta) = 2\cos^2(\delta) < 2\cos(\delta).$$

Przypadek II, gdy $\theta_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ i $\cos(\theta_2) < \cos(\theta_3)$. Wtedy $\theta_3 > \frac{3\pi}{2}$ i

$$\begin{aligned} S &= \cos(\theta_1) + \cos(\theta_3) = \cos(\theta_1) + \cos(\theta_0) = 2\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\right) \\ &\leqslant 2\left|\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\right)\right| = 2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\right) \leqslant 2\cos(\delta), \end{aligned} \tag{3.54}$$

gdyż $2\delta \leqslant \theta_1 - \theta_0 \leqslant \pi$.
Przypadek III, gdy $\frac{3\pi}{2} \leqslant \theta_2$ i $\cos(\theta_1) \geqslant \cos(\theta_2)$. Wtedy $\theta_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$ i analogicznie jak w (3.54),

$$S = \cos(\theta_1) + \cos(\theta_3) \leqslant 2\cos(\delta),$$

gdyż $2\delta \leqslant \theta_1 - \theta_0 \leqslant \pi$.
Przypadek IV, gdy $\frac{3\pi}{2} \leqslant \theta_2$ i $\cos(\theta_1) < \cos(\theta_2)$. Wtedy

$$S = \cos(\theta_2) + \cos(\theta_3) \leqslant 1 + \cos(\theta_2) \leqslant 1 + \cos(2\delta) = 2\cos^2(\delta) < 2\cos(\delta).$$

Przypadek V, gdy $\theta_1 \leqslant \frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{3\pi}{2} \leqslant \theta_3$. Wtedy analogicznie jak w (3.54),

$$S = \cos(\theta_1) + \cos(\theta_3) \leqslant 2\cos(\delta),$$

gdyż $2\delta \leqslant \theta_1 - \theta_0 \leqslant \pi$.
Przypadek VI, gdy $\theta_1 \leqslant \frac{\pi}{2} < \theta_2 < \theta_3 \leqslant \frac{3\pi}{2}$. Wtedy

$$S = \cos(\theta_1) < 1 \leqslant 2\cos(\delta),$$

gdyż $\delta \leqslant \frac{\pi}{3}$.
Przypadek VII, gdy $\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \frac{3\pi}{2} \leqslant \theta_3$. Wtedy

$$S = \cos(\theta_3) \leqslant 1 \leqslant 2\cos(\delta),$$

gdyż $\delta \leqslant \frac{\pi}{3}$.
Przypadek VIII, gdy $\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 \leqslant \frac{3\pi}{2}$. Wtedy

$$S = 0 < 2\cos(\delta).$$

Reasumując, z przypadków I-VIII wynika na mocy nierówności (3.53) oszacowanie (3.52). Pozostaje zbadać, kiedy w (3.52) pojawia się równość. Wtedy może zajść jeden z przypadków II, III, V, VII. Załóżmy więc, że zachodzi równość

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2 + z_3) = 1 + 2\cos(\delta). \tag{3.55}$$

Wtedy z przypadku II, III lub V otrzymujemy

$$\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_0}{2}\right) = 1 \quad \text{i} \quad \cos\left(\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\right) = \cos(\delta).$$

Ponieważ $\frac{\theta_0+\theta_1}{2} < \theta_1 < \theta_3 \leqslant 2\pi$ oraz $\frac{\theta_0+\theta_1}{2} > \theta_0 = \theta_3 - 2\pi > -2\pi$, więc pierwsza równość implikuje $\theta_1 + \theta_0 = 0$. Z kolei druga równość prowadzi do $\theta_1 - \theta_0 = 2\delta$, skąd $\theta_0 = -\delta$ i $\theta_1 = \delta$. Z lematu 3.5 wynika, że

$$\operatorname{Re} z_2 = \max(\{\cos(\theta_2), \cos(\theta_1), 0\}) = \cos(\delta),$$

gdyż $\cos(\theta_2) < \cos(\theta_1) = \cos(\theta_3) = \cos(\delta)$, oraz

$$\operatorname{Re} z_3 = \max(\{\cos(\theta_3), \cos(\theta_2), 0\}) = \cos(\delta),$$

gdyż $\cos(\theta_2) < \cos(\theta_3) = \cos(\theta_1) = \cos(\delta)$. Przyjmijmy $T_k := \mathrm{T}_k(\theta)$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,3}$. Zakładając, że $|T_2|_1 \leqslant \pi$ mamy

$$D_2 = \operatorname{conv}(T_2 \cup \{0\}) = \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} : r \in [0;1] \wedge t \in [\delta; \theta_2]\}.$$

Ponieważ $z_2 \in D_2$, więc $z_2 = |z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ dla pewnego $t \in [\delta; \theta_2]$. Stąd i z równości $\operatorname{Re} z_2 = \cos(\delta)$ wynika, że $\cos(\delta) = \operatorname{Re} z_2 = |z_2| \cos(t)$. W konsekwencji $t = \delta$ i $|z_2| = 1$, czyli $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$. Załóżmy, że $|T_2|_1 > \pi$. Wtedy $D_2 = D_2' \cup D_2''$, gdzie

$$D_2' := \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} : r \in [0;1] \wedge t \in [\delta; \theta_2]\} \quad \text{oraz} \quad D_2'' := \operatorname{conv}(\{0, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}\}).$$

Jeśli $z_2 \in D_2'$ to analogicznie jak w przypadku, gdy $|T_2|_1 \leqslant \pi$, $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$. Możemy więc ograniczyć się do przypadku, gdy $z_2 \in D_2''$. Wtedy $z_2 = \lambda_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} + \lambda_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$ dla pewnego ciągu $\mathbb{Z}_{0,2} \ni k \mapsto \lambda_k \in [0;1]$ spełniającego równość $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Ponieważ $\delta < \theta_2 < 2\pi - \delta$, więc

$$\begin{aligned} \cos(\delta) = \operatorname{Re} z_2 &= \lambda_1 \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} + \lambda_2 \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \lambda_1 \cos(\delta) + \lambda_2 \cos(\theta_2) \\ &< \lambda_1 \cos(\delta) + \lambda_2 \cos(\delta) = (\lambda_1 + \lambda_2)\cos(\delta) \leqslant \cos(\delta), \end{aligned}$$

gdy $\lambda_2 > 0$. Dlatego $\lambda_2 = 0$ i $\lambda_1 = 1$, skąd $z_2 = \lambda_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$. W obu przypadkach $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} \in D_2$. Ponieważ $z_3 \in D_3$, więc $\overline{z}_3 \in \operatorname{conv}(T_2' \cup \{0\})$, gdzie $T_2' := \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} : t \in [\delta; 2\pi - \theta_2]\}$. Ponadto $\operatorname{Re} \overline{z}_3 = \operatorname{Re} z_3 = \cos(\delta)$. Korzystając z rozumowania dla punktu z_2 stwierdzamy, że $\overline{z}_3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$, skąd $z_3 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} \in D_3$. Ponieważ

$$1 + 2\cos(\delta) = \operatorname{Re}(z_1 + z_2 + z_3) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 + \operatorname{Re} z_3 = \operatorname{Re} z_1 + 2\cos(\delta),$$

więc $\operatorname{Re} z_1 = 1$, i w konsekwencji $z_1 = 1 \in D_1$. Zatem równość (3.55) implikuje warunek (ii). Na odwrót, jeśli zachodzi warunek (ii) to

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2 + z_3) = \operatorname{Re}(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}) = 1 + 2\cos(\delta),$$

co daje równość w (3.52).

Na podstawie przypadku VII, równość (3.55) zachodzi, gdy $\cos(\theta_3) = 1$ i $2\cos(\delta) = 1$. Stąd $\theta_0 = 0$ oraz $|T_1|_1 = |T_2|_1 = |T_3|_1 = 2\delta = \frac{2\pi}{3}$. W konsekwencji $\theta_1 = \theta_0 + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ i $\theta_2 = \theta_1 + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$. Ponieważ $z_2 \in D_2 \subset \{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Re} z \leqslant 0\}$, więc $\operatorname{Re} z_2 \leqslant 0$. Ponadto $\operatorname{Re} z_1 \leqslant 1$ i $\operatorname{Re} z_3 \leqslant 1$, gdyż $z_1 \in D_1$ i $z_3 \in D_3$. Ponieważ

$$2 = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{Re}(z_1 + z_2 + z_3) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 + \operatorname{Re} z_3,$$

więc $\operatorname{Re} z_1 = 1 = \operatorname{Re} z_3$ i $\operatorname{Re} z_2 = 0$. Stąd $z_1 = 1 \in D_1$ i $z_3 = 1 \in D_3$. Ponieważ $z_2 \in D_2$, więc $z_2 = |z_2|\mathrm{e}^{it}$ dla pewnego $t \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$. Stąd $0 = \operatorname{Re} z_2 = |z_2|\cos(t)$, i w konsekwencji $z_2 = 0$. Zatem równość w (3.52) implikuje warunek (i). Na odwrót, warunek (i) prowadzi do $\operatorname{Re}(z_1 + z_2 + z_3) = 2 = 1 + 2\cos(\delta)$, gdyż $\delta = \frac{\pi}{3}$. To daje równość w (3.52) i tym samym kończy dowód. □

Wniosek 3.15. *Dla każdego $\delta \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right]$ zachodzi równość*

$$\rho_3(\delta) = 1 + 2\cos(\delta).$$

Dowód. Ustalmy dowolnie $\delta \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right]$. Z określenia zbioru A_δ wynika, że dla dowolnie zadanego $s \in A_\delta$ istnieją $\theta \in \mathcal{P}_3$ oraz ciąg $\mathbb{Z}_{1,3} \ni k \mapsto z_k \in \mathrm{D}_k(\theta)$ spełniające równości $\delta_\theta = \delta$ i (3.20) z $n := 3$. Istnieją wówczas permutacja obrotowa σ zbioru $\mathbb{Z}_{1,3}$ oraz $\tilde{\theta} \in \mathcal{P}_3$ o tej własności, że $\tilde{\theta}_0 \leqslant 0 < \tilde{\theta}_1$ i $\mathrm{T}_{\sigma(k)}(\theta) = \mathrm{T}_k(\tilde{\theta})$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,3}$. Stąd $z_{\sigma(k)} \in \mathrm{D}_{\sigma(k)}(\theta) = \mathrm{D}_k(\tilde{\theta})$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,3}$. Ponieważ $\delta_{\tilde{\theta}} = \delta_\theta = \delta$, więc na mocy lematu 3.14,

$$s = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{3} z_k\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{3} z_{\sigma(k)}\right) \leqslant 1 + 2\cos(\delta).$$

Z drugiej strony z lematu 3.14 wynika, że $1 + 2\cos(\delta) \in A_\delta$. Dlatego $\max(A_\delta) = 1 + 2\cos(\delta)$. Stąd wobec wzoru (3.19), $\rho_3(\delta) = \sup(A_\delta) = 1 + 2\cos(\delta)$, co kończy dowód. □

Twierdzenie 3.16. *Dla każdego $\theta \in \mathcal{P}_3$ zachodzi oszacowanie*

$$(3.56) \qquad |F(z)| \leqslant 1 - \frac{4}{\pi}\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{|z| + \cos(\delta)}\right) - \delta\right), \qquad F \in \mathcal{F}_\theta,\ z \in \mathbb{D},$$

gdzie $\delta := \delta_\theta$. Co więcej, równość w (3.56) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta = \frac{\pi}{3}$ oraz zachodzi jeden z następujących przypadków ekstremalnych:

(i) *$z = 0$ i istnieje permutacja obrotowa σ zbioru $\mathbb{Z}_{1,3}$ taka, że*

$$(3.57) \qquad F = u\left(\mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(1)}}] + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(2)}}] + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(3)}}]\right),$$

gdzie u jest środkiem łuku $T_{\sigma(1)}$ i $T_k := \mathrm{T}_k(\theta)$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,3}$;

(ii) $z \in \mathrm{conv}(\{0,u\})$ *i istnieje permutacja obrotowa* σ *zbioru* $\mathbb{Z}_{1,3}$ *taka, że*

$$F = u\left(1 - \mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(2)}}]\right), \tag{3.58}$$

gdzie $u \in T_{\sigma(1)} \cap T_{\sigma(3)}$.

Dowód. Ustalmy dowolnie $\theta \in \mathcal{P}_3$. Na mocy wniosku 3.3 z $n := 3$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leqslant 1 - (3 - \rho_3(\delta)) \cdot p(z) \\ &\leqslant 1 - \frac{1}{\pi}(3 - \rho_3(\delta))\left(2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{|z| + \cos(\delta)}\right) - \delta\right), \quad F \in \mathcal{F}_\theta,\ z \in \mathbb{D}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Na mocy wniosku 3.15 dostajemy

$$3 - \rho_3(\delta) = 3 - 1 - 2\cos(\delta) = 2\,(1 - \cos(\delta)) = 4\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right). \tag{3.60}$$

To wraz z (3.59) implikuje oszacowanie (3.56).

Zbadamy teraz kiedy w oszacowaniu (3.56) pojawia się równość. Innymi słowy wyznaczymy wszystkie pary $(F,z) \in \mathcal{F}_\theta \times \mathbb{D}$ takie, że

$$|F(z)| = 1 - \frac{4}{\pi}\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\left(2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{|z| + \cos(\delta)}\right) - \delta\right). \tag{3.61}$$

Załóżmy, że $F \in \mathcal{F}_\theta$ i $z \in \mathbb{D}$ spełniają równość (3.61). Jeśli

$$|F(z)| < 1 - (3 - \rho_3(\delta)) \cdot p(z)$$

lub

$$p(z) > \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{|z| + \cos(\delta)}\right) - \frac{\delta}{\pi},$$

to w nierównościach (3.59) również pojawi się nierówność ostra, co przeczy równości (3.61). Dlatego

$$|F(z)| = 1 - (3 - \rho_3(\delta)) \cdot p(z) \tag{3.62}$$

oraz

$$p(z) = \mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](|z|) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{|z| + \cos(\delta)}\right) - \frac{\delta}{\pi}. \tag{3.63}$$

Stosując twierdzenie 3.1 z $n := 3$ wyprowadzamy z (3.1) nierówność $|F(z)| \leqslant 1 - (3 - S) \cdot p(z)$, która łącznie z równością (3.62) daje $\rho_3(\delta) \leqslant S$. Z drugiej strony na mocy lematu 3.2, $S \leqslant \rho_3(\delta)$. Dlatego $S = \rho_3(\delta)$. Ta równość łącznie z równością (3.62) oznacza równość w (3.1). Stosując ponownie twierdzenie 3.1 z $n := 3$ widzimy,

że istnieją $u \in \mathbb{T}$, funkcja mierzalna $f : \mathbb{T} \to \mathrm{cl}(\mathbb{D})$ i ciąg $\mathbb{Z}_{1,3} \ni k \mapsto c_k \in \mathrm{fr}(D_k)$ spełniające warunki (i)–(v) tego twierdzenia, gdzie $D_k := \mathrm{D}_k(\theta)$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,3}$. Istnieje permutacja obrotowa σ zbioru $\mathbb{Z}_{1,3}$ oraz $\tilde{\theta} \in \mathcal{P}_3$ takie, że

$$\tilde{T}_k := \bar{u}T_{\sigma(k)} = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} : t \in [\tilde{\theta}_{k-1}; \tilde{\theta}_k]\}, \quad k \in \mathbb{Z}_{1,3} \tag{3.64}$$

oraz $\tilde{\theta}_0 \leqslant 0 < \tilde{\theta}_1$. Stąd ciąg $\mathbb{Z}_{1,3} \ni k \to \tilde{T}_k$ jest partycją okręgu $\mathbb{T}$ i $\min(\{|\tilde{T}_k|_1 : k \in \mathbb{Z}_{1,3}\}) = 2\delta$. Przyjmując $z_k := \overline{u} \cdot c_{\sigma(k)}$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,3}$ stwierdzamy na mocy warunków (iii) i (iv) twierdzenia 3.1, że

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2 + z_3) = S = \rho_3(\delta) \tag{3.65}$$

oraz

$$z_k = 1 \quad \text{lub} \quad p_{\sigma(k)}(z) = p(z), \quad k \in \mathbb{Z}_{1,3}. \tag{3.66}$$

Z równości (3.65) i wniosku 3.15 wynika, że zachodzi równość w (3.52). Stąd na mocy lematu 3.14 zachodzi jeden z dwóch warunków:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 1 \quad \text{oraz} \quad \tilde{\theta}_0 = 0, \quad \tilde{\theta}_1 = \frac{2\pi}{3} \quad \text{i} \quad \tilde{\theta}_2 = \frac{4\pi}{3} \tag{3.67}$$

lub

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}, \quad z_3 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} \quad \text{oraz} \quad \tilde{\theta}_0 = -\delta \quad \text{i} \quad \tilde{\theta}_1 = \delta. \tag{3.68}$$

Korzystając z zależności (2.2) dostajemy

$$p_{\sigma(k)}(z) = \mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(k)}}](z) = \mathrm{P}[\chi_{u\tilde{T}_k}](u\bar{u}z) = \mathrm{P}[\chi_{\tilde{T}_k}](\bar{u}z), \quad k \in \mathbb{Z}_{1,3}. \tag{3.69}$$

Załóżmy najpierw, że zachodzi warunek (3.68). Wtedy $z_2 \neq 1 \neq z_3$, skąd na mocy (3.66) i (3.63),

$$p_{\sigma(2)}(z) = p_{\sigma(3)}(z) = p(z) = \mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](|z|).$$

Korzystając z wniosku 2.6 otrzymujemy równości

$$|T_{\sigma(2)}|_1 = |T_{\sigma(3)}|_1 = 2\delta \quad \text{i} \quad -\overline{u}_{\sigma(2)}z = |z| = -\overline{u}_{\sigma(3)}z,$$

gdzie $u_{\sigma(2)}$ i $u_{\sigma(3)}$ są odpowiednio środkami łuków $T_{\sigma(2)}$ i $T_{\sigma(3)}$. Ponieważ $u_{\sigma(2)} \neq u_{\sigma(3)}$, więc $z = 0$. Z równości (3.63) mamy więc $p_{\sigma(2)}(0) = p_{\sigma(3)}(0) = p(0) = \frac{\delta}{\pi}$. Ponadto $p_{\sigma(1)}(0) = \mathrm{P}[\chi_{\tilde{T}_1}](0) = \frac{1}{2\pi}\left(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0\right) = \frac{\delta}{\pi}$, gdyż $\tilde{\theta}_0 = -\delta$ i $\tilde{\theta}_1 = \delta$. Zatem $\frac{3\delta}{\pi} = p_{\sigma(1)}(0) + p_{\sigma(2)}(0) + p_{\sigma(3)}(0) = 1$, czyli $\delta = \frac{\pi}{3}$. Stąd na mocy (3.68),

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \quad \text{i} \quad z_3 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}. \tag{3.70}$$

Ponieważ $z_k = \overline{u} \cdot c_{\sigma(k)}$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,3}$, więc na mocy (3.70) dostajemy

$$c_{\sigma(1)} = u, \quad c_{\sigma(2)} = u\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \quad \text{i} \quad c_{\sigma(3)} = u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

To łącznie z warunkami (i) i (v) twierdzenia 3.1 prowadzi na mocy lematu 2.8 do funkcji ekstremalnej postaci

$$\begin{aligned} F = \mathrm{P}[f] &= \mathrm{P}\Big[\sum_{k=1}^{3} f \cdot \chi_{T_k}\Big] = \sum_{k=1}^{3} \mathrm{P}[f \cdot \chi_{T_k}] = \sum_{k=1}^{3} \mathrm{P}[c_k \chi_{T_k}] = \sum_{k=1}^{3} c_k \, \mathrm{P}[\chi_{T_k}] \\ &= \sum_{k=1}^{3} c_{\sigma(k)} \, \mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(k)}}] = u \left(\mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(1)}}] + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \, \mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(2)}}] + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \, \mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(3)}}] \right), \end{aligned} \tag{3.71}$$

gdyż każdy z punktów c_k, $k \in \mathbb{Z}_{1,3}$, jest punktem mocno ekstremalnym sektora D_k. Ponieważ $F \in \mathcal{F}_\theta$, więc z (3.71) wynika, że $u \in T_{\sigma(1)}$, $u\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \in T_{\sigma(2)}$ i $u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \in T_{\sigma(3)}$. Ponadto $|T_{\sigma(1)}|_1 = \frac{2\pi}{3}$. Jeśli u nie jest środkiem łuku $T_{\sigma(1)}$ to $u\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \in T_{\sigma(1)} \setminus T_{\sigma(2)}$ albo $u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \in T_{\sigma(1)} \setminus T_{\sigma(3)}$, co jest niemożliwe. Dlatego u jest środkiem łuku $T_{\sigma(1)}$. To łącznie z (3.71) implikuje warunek (i) twierdzenia.

Załóżmy, że zachodzi warunek (3.67). Wtedy $c_{\sigma(1)} = u \cdot z_1 = u = u \cdot z_3 = c_{\sigma(3)}$. Ponadto $c_{\sigma(1)} \in D_{\sigma(1)}$ i $c_{\sigma(3)} \in D_{\sigma(3)}$. Stąd $u \in D_{\sigma(1)} \cap D_{\sigma(3)}$, i tym samym $u \in T_{\sigma(1)} \cap T_{\sigma(3)}$, gdyż $u \in \mathbb{T}$. Z warunku (3.66) oraz z równości (3.69) i (3.63) wynika, że

$$\mathrm{P}[\chi_{\tilde{T}_2}](\bar{u}z) = p_{\sigma(2)}(z) = p(z) = \mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](|z|). \tag{3.72}$$

Korzystając ponownie z wniosku 2.6 dostajemy równości $|\tilde{T}_2|_1 = 2\delta$ i $-\overline{v}\overline{u}z = |\overline{u}z| = |z|$, gdzie v jest środkiem łuku $\tilde{T}_2$. Z (3.67) wynika zaś, że $v = -1$. Zatem $\bar{u}z = |z|$, czyli

$$z = |z|u \in \mathrm{conv}(\{0, u\}). \tag{3.73}$$

Ponieważ $c_{\sigma(1)} = c_{\sigma(3)} = u$ i $c_{\sigma(2)} = z_2 \cdot u = 0$, więc warunki (i) i (v) twierdzenia 3.1 prowadzą na mocy lematu 2.8 do funkcji ekstremalnej postaci

$$\begin{aligned} F = \mathrm{P}[f] &= \mathrm{P}\Big[\sum_{k=1}^{3} f \cdot \chi_{T_k}\Big] = \sum_{k=1}^{3} \mathrm{P}[f \cdot \chi_{T_k}] = \sum_{k=1}^{3} \mathrm{P}[c_k \chi_{T_k}] = \sum_{k=1}^{3} c_k \, \mathrm{P}[\chi_{T_k}] \\ &= \sum_{k=1}^{3} c_{\sigma(k)} \, \mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(k)}}] = u \left(\mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(1)}}] + \mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(3)}}] \right) = u \left(1 - \mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(2)}}] \right), \end{aligned}$$

gdyż c_k jest punktem mocno ekstremalnym sektora D_k dla $k \in \mathbb{Z}_{1,3}$. To implikuje warunek (ii) twierdzenia, gdyż $u \in T_{\sigma(1)} \cap T_{\sigma(3)}$. Tym samym równoważność w twierdzeniu została wykazana w stronę ($\Rightarrow$).

Na odwrót, niech $\delta = \frac{\pi}{3}$. Załóżmy, że $z = 0$ i istnieje permutacja obrotowa σ zbioru $\mathbb{Z}_{1,3}$ taka, że

$$F = u \left(\mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(1)}}] + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \, \mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(2)}}] + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \, \mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(3)}}] \right),$$

gdzie u jest środkiem łuku $T_{\sigma(1)}$. Wtedy $\mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(k)}}](0) = \frac{1}{3}$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,3}$, co wobec równości $|u| = 1$ daje

$$|F(0)| = \left|\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right| = \frac{2}{3}.$$

Ponieważ prawa strona oszacowania (3.56) jest równa $\frac{2}{3}$, gdy $z = 0$ i $\delta = \frac{\pi}{3}$, więc dla funkcji postaci (3.57) zachodzi równość w (3.56) dla takich z i δ, co dowodzi warunku (i). Załóżmy teraz, że $z \in \operatorname{conv}(\{0, u\})$ i istnieje permutacja obrotowa σ zbioru $\mathbb{Z}_{1,3}$ taka, że

$$F = u\left(1 - \mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(2)}}]\right),$$

gdzie $u \in T_{\sigma(1)} \cap T_{\sigma(3)}$. Wtedy $z = |z|u$ i punkt u leży naprzeciw środka łuku $T_{\sigma(2)}$, czyli $-u$ jest środkiem łuku $T_{\sigma(2)}$. Ponieważ $\bar{u}(-u) = -1$ i $|\bar{u}T_{\sigma(2)}|_1 = 2\delta = |I_\delta|_1$, więc $\bar{u}T_{\sigma(2)} = I_\delta$. Korzystając z zależności (2.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned}|F(z)| &= \left|1 - \mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(2)}}](|z|u)\right| = 1 - \mathrm{P}[\chi_{u\bar{u}T_{\sigma(2)}}](u|z|) = 1 - \mathrm{P}[\chi_{\bar{u}T_{\sigma(2)}}](|z|)\\ &= 1 - \mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](|z|).\end{aligned}$$

Ponieważ $4\sin^2(\frac{\delta}{2}) = 4\sin^2(\frac{\pi}{6}) = 1$, więc na mocy lematu 2.4, $|F(z)|$ jest równy prawej stronie oszacowania (3.56), gdy $\delta = \frac{\pi}{3}$ i $z \in \operatorname{conv}(\{0, u\})$. Zatem dla funkcji postaci (3.58) zachodzi równość w (3.56) dla takich δ i z, co dowodzi warunku (ii), a tym samym równoważności w twierdzeniu w stronę ($\Leftarrow$). Obie implikacje dają łącznie równoważność, co kończy dowód. □

Uwaga 3.17. Funkcję F w (3.57) i (3.58) można wyrazić w sposób jawny korzystając z uwagi 2.2. Ponieważ $\delta = \frac{\pi}{3}$ oraz $-\bar{u} \cdot u = -1$, więc przyjmując $a := \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3}$ i korzystając z zależności (2.2) dostajemy dla każdego $z \in \mathbb{D}$ równości

$$\begin{aligned}\mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(1)}}](z) &= \mathrm{P}[\chi_{-\bar{u}T_{\sigma(1)}}](-\bar{u}z) = \mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](-\bar{u}z);\\ \mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(2)}}](z) &= \mathrm{P}[\chi_{-a^{-2}\bar{u}T_{\sigma(2)}}](-a^{-2}\bar{u}z) = \mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](-a^{-2}\bar{u}z);\\ \mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(3)}}](z) &= \mathrm{P}[\chi_{-a^{2}\bar{u}T_{\sigma(3)}}](-a^{2}\bar{u}z) = \mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](-a^{2}\bar{u}z),\end{aligned}$$

gdzie u jest środkiem łuku $T_{\sigma(1)}$. Stąd na mocy równości (3.57) stwierdzamy, że dla każdego $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}F(z) &= u\Big(\mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](-\bar{u}z) + a\,\mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](-a^{-2}\bar{u}z) + a^{-1}\,\mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](-a^{2}\bar{u}z)\Big)\\ &= u\sum_{k=-1}^{1} a^{-k}\,\mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](-a^{2k}\bar{u}z).\end{aligned}$$

Korzystając z uwagi 2.2 możemy każdą z funkcji (3.57) wyrazić w postaci

$$F(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} - \frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}\sum_{k=-1}^{1} \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}k/3} \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - 4\operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi k/3-\tau)}z\right) + |z|^2}{\sqrt{3}(1-|z|^2)}\right), \quad z \in \mathbb{D},$$

dla $\tau \in \{(\theta_k + \theta_{k-1})/2 : k \in \mathbb{Z}_{1,3}\}$. W przypadku (3.58), $-u$ jest środkiem łuku $T_{\sigma(2)}$. Korzystając z zależności (2.2) mamy

$$\mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(2)}}](z) = \mathrm{P}[\chi_{\bar{u}T_{\sigma}(2)}](\bar{u}z) = \mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](\bar{u}z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Stąd na mocy uwagi 2.2 możemy każdą z funkcji (3.58) wyrazić w postaci

$$F(z) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} + \frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}\operatorname{arctg}\left(\frac{1 + 4\operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau}z\right) + |z|^2}{\sqrt{3}(1-|z|^2)}\right), \quad z \in \mathbb{D},$$

dla $\tau \in \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$.

Uwaga 3.18. Załóżmy, że $\theta \in \mathcal{P}_3$ odpowiada partycji złożonej z trzech łuków $T_k := \mathrm{T}_k(\theta)$, $k \in \mathbb{Z}_{1,3}$, o jednakowej długości, czyli $\theta_k - \theta_{k-1} = \frac{2\pi}{3}$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,3}$. Wtedy $\delta_\theta = \frac{\pi}{3}$, i na podstawie wniosku 3.15, $\rho_3\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$. Stąd na mocy wniosku 3.3 otrzymujemy

$$|F(z)| \leqslant 1 - p(z) = 1 - \min(\{\mathrm{P}[\chi_{T_k}](z) : k \in \mathbb{Z}_{1,3}\}), \quad F \in \mathcal{F}_\theta,\ z \in \mathbb{D}, \tag{3.74}$$

oraz

$$|F(z)| \leqslant \frac{4}{3} - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{1+2|z|}\right), \quad F \in \mathcal{F}_\theta,\ z \in \mathbb{D}; \tag{3.75}$$

por. [17, Corollary 2.2]. Zatem oszacowanie (3.74) jest kierunkowym wzmocnieniem oszacowania typu radialnego (3.75) dla klasy $\mathcal{F}_\theta$.

3.4 Oszacowania dla partycji z czterema łukami

W tym podrozdziale rozważamy przypadek podziału okręgu jednostkowego na cztery łuki o dowolnej długości.

Lemat 3.19. *Dla każdego $\theta \in \mathcal{P}_4$ i każdego ciągu $\mathbb{Z}_{1,4} \ni k \mapsto z_k \in D_k := \mathrm{D}_k(\theta)$, jeśli $\theta_0 \leqslant 0 < \theta_1$ to zachodzi nierówność*

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) \leqslant \begin{cases} 2 + 2\cos(2\delta), & \text{gdy} \quad 0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{5}, \\ 1 + 2\cos(\delta), & \text{gdy} \quad \frac{\pi}{5} \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{4}, \end{cases} \tag{3.76}$$

gdzie $\delta := \delta_\theta$.

Dowód. Przy założeniach lematu 3.19 ustalmy dowolnie $k \in \mathbb{Z}_{2,4}$ spełniający warunek $T_k \subset \mathbb{T}_- := \{z \in \mathbb{T} : \operatorname{Re} z \leqslant 0\}$, gdzie $T_l := \mathrm{T}_l(\theta)$ dla $l \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Wtedy $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ dla $z \in D_k$, a w szczególności $\operatorname{Re} z_k \leqslant 0$. Niech $\sigma : \mathbb{Z}_{1,3} \to \mathbb{Z}_{1,4} \setminus \{k\}$ będzie funkcją rosnącą. Przyjmując dla każdego $l \in \mathbb{Z}_{1,3}$, $z'_l := z_{\sigma(l)}$ oraz $T'_l := T_{\sigma(l)}$, gdy $\sigma(l) \neq k - 1$,

i $T'_l := T_k \cup T_{\sigma(l)}$, gdy $\sigma(l) = k-1$, widzimy, że $z'_l \in D'_l := \operatorname{conv}(T'_l \cup \{0\})$ dla $l \in \mathbb{Z}_{1,3}$. Ponieważ $\mathbb{Z}_{1,3} \mapsto T'_l$ jest partycją okręgu $\mathbb{T}$ i $\min\{|T'_l| : l \in \mathbb{Z}_{1,3}\} \geqslant 2\delta$, więc stosując lemat 3.14 dostajemy nierówność

$$\begin{aligned} S &:= \operatorname{Re}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) = \operatorname{Re}(z'_1 + z'_2 + z'_3) + \operatorname{Re} z_k \leqslant \operatorname{Re}(z'_1 + z'_2 + z'_3) \\ &\leqslant 1 + 2\cos(\delta), \end{aligned} \tag{3.77}$$

o ile istnieje $k \in \mathbb{Z}_{2,4}$ taki, że $T_k \subset \mathbb{T}_-$. Wykażemy, że $S \leqslant 2+2\cos(2\delta)$, gdy $T_k \setminus \mathbb{T}_- \neq \emptyset$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,4}$. Warunek ten prowadzi do następujących przypadków:

I. $\theta_3 \leqslant \frac{\pi}{2}$ i $\theta_4 \leqslant \frac{3\pi}{2}$. Z twierdzenia 3.6 wynika, że

$$\begin{aligned} S &\leqslant 1 + \sum_{k=2}^{4} \cos(\theta_{k-1}) = 1 + \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \cos(\theta_3) \\ &= 1 + \cos(\theta_2) + 2\cos\left(\frac{\theta_3+\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\right) \\ &< 2 + 2\cos\left(\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\right) \leqslant 2 + 2\cos(2\delta), \end{aligned} \tag{3.78}$$

gdyż $4\delta \leqslant \theta_3 - \theta_1 \leqslant \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$.

II. $\theta_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ i $\theta_3 \leqslant \frac{3\pi}{2} \leqslant \theta_4$. Z twierdzenia 3.6 wynika, że

$$S \leqslant 1 + \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \max(\{\cos(\theta_3), \cos(\theta_4)\}).$$

Jeśli $\cos(\theta_3) > \cos(\theta_4)$ to $\theta_3 \leqslant \frac{\pi}{2}$ i analogicznie jak w (3.78),

$$S \leqslant 1 + \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \cos(\theta_3) \ < 2 + 2\cos(2\delta).$$

Jeśli zaś $\cos(\theta_3) \leqslant \cos(\theta_4)$ to

$$\begin{aligned} S &\leqslant 1 + \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \cos(\theta_4) = 1 + \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \cos(\theta_0) \\ &= 1 + \cos(\theta_1) + 2\cos\left(\frac{\theta_0+\theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_0}{2}\right) < 2 + 2\cos(2\delta), \end{aligned} \tag{3.79}$$

gdyż $4\delta \leqslant \theta_2 - \theta_0 \leqslant \frac{\pi}{2} - (\theta_4 - 2\pi) = \frac{5\pi}{2} - \theta_4 \leqslant \frac{5\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = \pi$.

III. $\theta_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$ i $\theta_2 \leqslant \frac{3\pi}{2} \leqslant \theta_3$. Z twierdzenia 3.6 wynika, że

$$S \leqslant 1 + \cos(\theta_1) + \max(\{\cos(\theta_2), \cos(\theta_3)\}) + \cos(\theta_4).$$

Jeśli $\cos(\theta_2) > \cos(\theta_3)$ to $\theta_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ i analogicznie jak w (3.79),

$$S \leqslant 1 + \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \cos(\theta_0) < 2 + 2\cos(2\delta).$$

Jeśli zaś $\cos(\theta_2) \leqslant \cos(\theta_3)$ to

$$
\begin{aligned}
S &\leqslant 1+\cos(\theta_1)+\cos(\theta_3)+\cos(\theta_4) = 1+\cos(\theta_1)+\cos(2\pi-\theta_3)+\cos(\theta_4) \\
&\leqslant 2+2\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_3}{2}-\pi\right)\cos\left(\frac{\theta_1-(\theta_3-2\pi)}{2}\right) \leqslant 2+2\cos(2\delta),
\end{aligned} \tag{3.80}
$$

gdyż $\theta_1-(\theta_3-2\pi)=\theta_1-\theta_0+\theta_0+2\pi-\theta_3 \geqslant 2\delta+\theta_4-\theta_3 \geqslant 4\delta$ oraz $\theta_1-(\theta_3-2\pi) \leqslant \frac{\pi}{2}+2\pi-\theta_3 \leqslant \frac{\pi}{2}+2\pi-\frac{3\pi}{2}=\pi$.

IV. $\theta_1 \leqslant \frac{3\pi}{2} \leqslant \theta_2$. Z twierdzenia 3.6 wynika, że

$$S \leqslant 1+\max(\{\cos(\theta_1),\cos(\theta_2)\})+\cos(\theta_3)+\cos(\theta_4).$$

Jeśli $\cos(\theta_1) > \cos(\theta_2)$ to $\theta_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$ i analogicznie jak w (3.80),

$$S \leqslant 1+\cos(\theta_1)+\cos(\theta_3)+\cos(\theta_4) \ \leqslant 2+2\cos(2\delta).$$

Jeśli zaś $\cos(\theta_1) \leqslant \cos(\theta_2)$ to

$$
\begin{aligned}
S &\leqslant 1+\cos(\theta_2)+\cos(\theta_3)+\cos(\theta_4) \\
&= 1+\cos(\theta_3)+2\cos\left(\frac{\theta_2+\theta_4}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_4-\theta_2}{2}\right) < 2+2\cos(2\delta),
\end{aligned} \tag{3.81}
$$

gdyż $4\delta \leqslant \theta_4-\theta_2 \leqslant 2\pi-\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$.

V. $\frac{3}{2}\pi \leqslant \theta_1$. Z twierdzenia 3.6 wynika, analogicznie jak w (3.81), że

$$S \leqslant 1+\cos(\theta_2)+\cos(\theta_3)+\cos(\theta_4) < 2+2\cos(2\delta).$$

Biorąc pod uwagę wszystkie przypadki I-V widzimy, że $S \leqslant 2+2\cos(2\delta)$, gdy $T_k \setminus \mathbb{T}_- \neq \emptyset$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,4}$. To łącznie z (3.77) implikuje nierówność

$$S \leqslant \max(\{1+2\cos(\delta), 2+2\cos(2\delta)\}). \tag{3.82}$$

Ponieważ $4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-1=0$, więc

$$M_\delta := (2+2\cos(2\delta))-(1+2\cos(\delta)) = 4\cos^2(\delta)-2\cos(\delta)-1<0,$$

gdy $\cos(\delta) < \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ oraz $M_\delta > 0$, gdy $\cos(\delta) > \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Ponieważ $0<\delta\leqslant\frac{\pi}{4}$, więc nierówność (3.82) jest równoważna nierówności (3.76), co kończy dowód. □

Wniosek 3.20. *Dla każdego* $\delta \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right]$ *zachodzi równość*

$$\rho_4(\delta) = \begin{cases} 2+2\cos(2\delta), & gdy \quad 0<\delta\leqslant\frac{\pi}{5}, \\ 1+2\cos(\delta), & gdy \quad \frac{\pi}{5}\leqslant\delta\leqslant\frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie $\delta \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right]$. Z określenia zbioru A_δ wynika, że dla dowolnie zadanego $s \in A_\delta$ istnieją $\theta \in \mathcal{P}_4$ oraz ciąg $\mathbb{Z}_{1,4} \ni k \mapsto z_k \in \mathrm{D}_k(\theta)$ spełniające równości $\delta_\theta = \delta$ i (3.20) z $n := 4$. Istnieją wówczas permutacja obrotowa σ zbioru $\mathbb{Z}_{1,4}$ oraz $\tilde{\theta} \in \mathcal{P}_4$ o tej własności, że $\tilde{\theta}_0 \leqslant 0 < \tilde{\theta}_1$ i $\mathrm{T}_{\sigma(k)}(\theta) = \mathrm{T}_k(\tilde{\theta})$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,4}$. Stąd $z_{\sigma(k)} \in \mathrm{D}_{\sigma(k)}(\theta) = \mathrm{D}_k(\tilde{\theta})$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,4}$. Ponieważ $\delta_{\tilde{\theta}} = \delta_\theta = \delta$, więc na mocy lematu 3.19,

$$s = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{4} z_k\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{4} z_{\sigma(k)}\right) \leqslant \begin{cases} 2 + 2\cos(2\delta), & \text{gdy} \quad 0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{5}, \\ 1 + 2\cos(\delta), & \text{gdy} \quad \frac{\pi}{5} \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Ze wzoru (3.19) wynika zatem, że $\rho_4(\delta) \leqslant 2 + 2\cos(2\delta)$, gdy $0 < \delta \leqslant \pi/5$, oraz $\rho_4(\delta) \leqslant 1 + 2\cos(\delta)$, gdy $\pi/5 \leqslant \delta \leqslant \pi/4$.

Załóżmy, że $0 < \delta \leqslant \pi/5$. Niech $\theta \in \mathcal{P}_4$ i ciąg $\mathbb{Z}_{1,4} \ni k \mapsto z_k \in \mathbb{C}$ będą określone wzorami $\theta_0 := 0$, $\theta_1 := 2\delta$, $\theta_2 := \pi$, $\theta_3 := 2\pi - 2\delta$, $\theta_4 := 2\pi$ oraz $z_1 := 1$, $z_2 := \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta}$, $z_3 := \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\delta}$, $z_4 := 1$. Wtedy $\delta_\theta = \delta$, $z_k \in \mathrm{D}_k(\theta)$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,4}$ oraz $\operatorname{Re}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) = 2 + 2\cos(2\delta)$. Dlatego $2 + 2\cos(2\delta) \in A_\delta$, i tym samym $\rho_4(\delta) = 2 + 2\cos(2\delta)$.

Zakładając na koniec, że $\pi/5 \leqslant \delta \leqslant \pi/4$, rozważmy $\theta \in \mathcal{P}_4$ i ciąg $\mathbb{Z}_{1,4} \ni k \mapsto z_k \in \mathbb{C}$ określone wzorami $\theta_0 := -\delta$, $\theta_1 := \delta$, $\theta_2 := 3\delta$, $\theta_3 := 2\pi - 3\delta$, $\theta_4 := 2\pi - \delta$ i $z_1 := 1$, $z_2 := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$, $z_3 := 0$, $z_4 := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}$. Wtedy $\delta_\theta = \delta$, $z_k \in \mathrm{D}_k(\theta)$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,4}$ oraz $\operatorname{Re}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) = 1 + 2\cos(\delta)$. Dlatego $1 + 2\cos(\delta) \in A_\delta$. Stąd $\rho_4(\delta) = 1 + 2\cos(\delta)$, co kończy dowód. □

Twierdzenie 3.21. *Dla każdego $\theta \in \mathcal{P}_4$ zachodzą oszacowania:*

(i) *jeśli* $0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{5}$ *to*

$$(3.83) \quad |F(z)| < 1 - \frac{4}{\pi}\sin^2(\delta)\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{|z| + \cos(\delta)}\right) - \delta\right), \qquad F \in \mathcal{F}_\theta,\ z \in \mathbb{D},$$

(ii) *jeśli* $\frac{\pi}{5} \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{4}$ *to*

$$(3.84) \quad |F(z)| \leqslant 1 - \frac{1}{\pi}\left(1 + 4\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{|z| + \cos(\delta)}\right) - \delta\right), \qquad F \in \mathcal{F}_\theta,\ z \in \mathbb{D},$$

gdzie $\delta := \delta_\theta$. Co więcej, równość w (3.84) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta = \frac{\pi}{4}$, $z = 0$ i istnieje permutacja obrotowa σ zbioru $\mathbb{Z}_{1,4}$ taka, że

$$(3.85) \qquad F = u\left(\mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(1)}}] + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(2)}}] + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(4)}}]\right),$$

gdzie u jest środkiem łuku $T_{\sigma(1)}$.

Dowód. Ustalmy dowolnie $\theta \in \mathcal{P}_4$. Na mocy wniosku 3.3 z $n := 4$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}|F(z)| &\leqslant 1 - (4 - \rho_4(\delta)) \cdot p(z) \\ &\leqslant 1 - \frac{1}{\pi}(4 - \rho_4(\delta)) \left(2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{|z| + \cos(\delta)}\right) - \delta\right), \quad F \in \mathcal{F}_\theta,\ z \in \mathbb{D}.\end{aligned} \tag{3.86}$$

Niech $0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{5}$. Stąd na mocy wniosku 3.20 dostajemy

$$4 - \rho_4(\delta) = 4 - 2 - 2\cos(2\delta) = 2\,(1 - \cos(2\delta)) = 4\sin^2(\delta). \tag{3.87}$$

To wraz z (3.86) implikuje oszacowanie

$$|F(z)| \leqslant 1 - \frac{4}{\pi}\sin^2(\delta) \left(2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{|z| + \cos(\delta)}\right) - \delta\right), \quad F \in \mathcal{F}_\theta,\ z \in \mathbb{D}, \tag{3.88}$$

gdy $0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{5}$. Niech teraz $\frac{\pi}{5} \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{4}$. Stąd na mocy wniosku 3.20 dostajemy

$$4 - \rho_4(\delta) = 4 - 1 - 2\cos(\delta) = 1 + 2\,(1 - \cos(\delta)) = 1 + 4\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right). \tag{3.89}$$

To wraz z (3.86) implikuje oszacowanie (3.84).

Załóżmy, że w nierówności (3.88) lub (3.84) ma miejsce równość dla pewnych $F \in \mathcal{F}_\theta$ i $z \in \mathbb{D}$. Z twierdzenia 3.1 wynika więc istnienie $u \in \mathbb{T}$, funkcji mierzalnej $f : \mathbb{T} \to \operatorname{cl}(\mathbb{D})$ i ciągu $\mathbb{Z}_{1,4} \ni k \mapsto c_k \in \operatorname{fr}(D_k)$ spełniających warunki (i)–(v). W szczególności

$$(1 - \operatorname{Re}(\overline{u}c_k))(p_k(z) - p(z)) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_{1,4}. \tag{3.90}$$

Ponieważ $\operatorname{Re}(\overline{u}c_k) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c_k = u$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,4}$, więc istnieją $k', k'' \in \mathbb{Z}_{1,4}$ takie, że $k' \neq k''$ i $p_{k'}(z) = p_{k''}(z) = p(z)$. Dodatkowo równość w (3.88) lub (3.84) zachodzi wyłącznie w przypadku, gdy $p(z) = \mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](|z|)$. Wtedy $\mathrm{P}[\chi_{T_{k'}}](z) = \mathrm{P}[\chi_{T_{k''}}](z) = \mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](|z|)$. Z wniosku 2.6 wynika, że $|T_{k'}|_1 = |T_{k''}|_1 = 2\delta$ i $-\overline{u}_{k'}z = |z| = -\overline{u}_{k''}z$, gdzie $u_{k'}$ i $u_{k''}$ oznaczają odpowiednio środki łuków $T_{k'}$ i $T_{k''}$. Stąd $z = 0$, gdyż $u_{k'} \neq u_{k''}$. Z drugiej strony istnieje ciąg $\tilde{\theta} \in \mathcal{P}_4$ i permutacja obrotowa σ zbioru $\mathbb{Z}_{1,4}$ o tej własności, że $\tilde{\theta}_0 \leqslant 0 < \tilde{\theta}_1$ i $\overline{u}T_{\sigma(k)} = \mathrm{T}_k(\tilde{\theta})$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,4}$. Wtedy

$$\overline{u}c_{\sigma(k)} \in \operatorname{conv}(\{0\} \cup \overline{u}T_{\sigma(k)}) = \operatorname{conv}(\{0\} \cup \mathrm{T}_k(\tilde{\theta})) = \mathrm{D}_k(\tilde{\theta}), \quad k \in \mathbb{Z}_{1,4}.$$

Ponieważ $p(0) = \frac{\delta}{\pi}$ i $p_k(0) = \frac{1}{2\pi}|T_k|_1$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,4}$, więc warunek (3.90) przyjmuje postać

$$(1 - \operatorname{Re}(\overline{u}c_{\sigma(k)}))(|\overline{u}T_{\sigma(k)}|_1 - 2\delta) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_{1,4}. \tag{3.91}$$

Z warunków (i), (ii) i (v) twierdzenia 3.1 wynika, że

$$\begin{aligned}|F(0)| &= \overline{u}F(0) = \overline{u}\,\mathrm{P}[f](0) = \overline{u}\,\mathrm{P}\left[\sum_{k=1}^{4} f \cdot \chi_{T_k}\right](0) = \overline{u}\sum_{k=1}^{4} \mathrm{P}[f \cdot \chi_{T_k}](0) \\ &= \overline{u}\sum_{k=1}^{4} c_k\,\mathrm{P}[\chi_{T_k}](0) = \overline{u}\sum_{k=1}^{4} c_k p_k(0) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{4} \overline{u}c_k|T_k|_1,\end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned}2\pi|F(0)| &= \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=1}^{4}\overline{u}c_k|T_k|_1\Big) = \sum_{k=1}^{4}\mathrm{Re}(\overline{u}c_k)\cdot|T_k|_1 = \sum_{k=1}^{4}\mathrm{Re}(\overline{u}c_k)\cdot|\overline{u}T_k|_1\\ &= \sum_{k=1}^{4}\mathrm{Re}(\overline{u}c_{\sigma(k)})\cdot|\overline{u}T_{\sigma(k)}|_1.\end{aligned} \tag{3.92}$$

Korzystając z lematu 3.5 dostajemy

$$2\pi|F(0)| \leqslant 1\cdot(\tilde{\theta}_1-\tilde{\theta}_0)+\sum_{k=2}^{4}\max(\{\cos(\tilde{\theta}_k),\cos(\tilde{\theta}_{k-1}),0\})(\tilde{\theta}_k-\tilde{\theta}_{k-1}). \tag{3.93}$$

Dalszą część dowodu rozdzielimy na trzy przypadki ze względu na liczebność zbioru $A := \{k\in\mathbb{Z}_{1,4} : \tilde{\theta}_k-\tilde{\theta}_{k-1}=2\delta\}$.

Załóżmy, że $\overline{\overline{A}}=2$. Wtedy $\delta<\frac{\pi}{4}$, i na mocy (3.91), $\tilde{\theta}_0=0$ i $\tilde{\theta}_2-\tilde{\theta}_1=2\delta=\tilde{\theta}_3-\tilde{\theta}_2$. Z (3.93) wynika więc, że dla każdego $\delta\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$,

$$\begin{aligned}2\pi|F(0)| &\leqslant 1\cdot(\tilde{\theta}_1-\tilde{\theta}_0)+1\cdot(\tilde{\theta}_4-\tilde{\theta}_3)+\sum_{k=2}^{3}\max(\{\cos(\tilde{\theta}_k),\cos(\tilde{\theta}_{k-1}),0\})(\tilde{\theta}_k-\tilde{\theta}_{k-1})\\ &= 2\pi-(\tilde{\theta}_3-\tilde{\theta}_1)+2\delta\sum_{k=2}^{3}\max(\{\cos(\tilde{\theta}_k),\cos(\tilde{\theta}_{k-1}),0\})\\ &< 2\pi-4\delta+4\delta\cdot\max(\{\cos(2\delta),0\}) = 2\pi-4\delta+4\delta\cos(2\delta)\\ &= 2\pi-4\delta+4\delta(1-2\sin^2(\delta)) = 2\pi-8\delta\sin^2(\delta),\end{aligned}$$

gdyż $2\delta<\tilde{\theta}_1<\tilde{\theta}_2<\tilde{\theta}_3<2\pi-2\delta$. Dlatego równość w (3.88) nie zachodzi. Ponadto z równości $4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-1=0$ wynika, że

$$2\pi-8\delta\sin^2(\delta)<2\pi-2\delta\left(1+4\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right),\quad \delta\in\left(\frac{\pi}{5};\frac{\pi}{4}\right). \tag{3.94}$$

Zatem równość w (3.84) nie zachodzi.

Załóżmy, że $\overline{\overline{A}}=3$. Wtedy $\delta<\frac{\pi}{4}$, i na mocy (3.91), $\tilde{\theta}_0\leqslant 0<\tilde{\theta}_1$ i $\tilde{\theta}_2-\tilde{\theta}_1=\tilde{\theta}_3-\tilde{\theta}_2=\tilde{\theta}_4-\tilde{\theta}_3=2\delta$, bądź

$$\tilde{\theta}_0=0 \quad \text{i} \quad \tilde{\theta}_1-\tilde{\theta}_0=\tilde{\theta}_2-\tilde{\theta}_1=\tilde{\theta}_3-\tilde{\theta}_2=2\delta. \tag{3.95}$$

Załóżmy, że zachodzi pierwsza możliwość. Z nierówności (3.93) wynika, że

$$\begin{aligned}2\pi|F(0)| &\leqslant \tilde{\theta}_1-\tilde{\theta}_0+\sum_{k=2}^{4}\max(\{\cos(\tilde{\theta}_k),\cos(\tilde{\theta}_{k-1}),0\})(\tilde{\theta}_k-\tilde{\theta}_{k-1})\\ &= 2\pi-6\delta+2\delta\sum_{k=2}^{4}\max(\{\cos(\tilde{\theta}_k),\cos(\tilde{\theta}_{k-1}),0\}).\end{aligned} \tag{3.96}$$

Wówczas mogą zajść następujące przypadki.
Przypadek I, gdy $\tilde{\theta}_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$ i $\tilde{\theta}_4 \leqslant \frac{3\pi}{2}$. Wtedy z nierówności (3.96) wynika, że

$$\begin{aligned}
2\pi|F(0)| &\leqslant 2\pi - 6\delta + 2\delta\max(\{\cos(\tilde{\theta}_1),0\}) \\
&\quad + 2\delta\max(\{\cos(\tilde{\theta}_2),0\}) + 2\delta\max(\{\cos(\tilde{\theta}_3),0\}) \\
&< 2\pi - 4\delta + 4\delta\cos(2\delta) = 2\pi - 8\delta\sin^2(\delta), \quad \delta \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

Przypadek II, gdy $\frac{\pi}{2} < \tilde{\theta}_1$ i $\tilde{\theta}_4 \leqslant \frac{3\pi}{2}$. Wtedy z nierówności (3.96) wnioskujemy, że

$$2\pi|F(0)| \leqslant 2\pi - 6\delta < 2\pi - 8\delta\sin^2(\delta), \quad \delta \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right).$$

Przypadek III, gdy $\frac{\pi}{2} < \tilde{\theta}_1$ i $\frac{3\pi}{2} < \tilde{\theta}_4$. Wtedy z nierówności (3.96) dostajemy

$$\begin{aligned}
2\pi|F(0)| &\leqslant 2\pi - 6\delta + 2\delta\max(\{\cos(\tilde{\theta}_2),0\}) + 2\delta\max(\{\cos(\tilde{\theta}_3),0\}) + 2\delta\cos(\tilde{\theta}_4) \\
&< 2\pi - 6\delta + 2\delta + 4\delta\cos(2\pi - 2\delta) = 2\pi - 4\delta + 4\delta\cos(2\delta) \\
&= 2\pi - 8\delta\sin^2(\delta), \quad \delta \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

Przypadek IV, gdy $\tilde{\theta}_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$ i $\frac{3\pi}{2} < \tilde{\theta}_4$. Wtedy $\frac{\pi}{2} \leqslant \tilde{\theta}_2 < \tilde{\theta}_3 \leqslant \frac{3\pi}{2}$ i z nierówności (3.96) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
2\pi|F(0)| &\leqslant 2\pi - 6\delta + 2\delta\cos(\tilde{\theta}_1) + 2\delta\cos(\tilde{\theta}_4) = 2\pi - 6\delta + 2\delta\cos(\tilde{\theta}_1) + 2\delta\cos(\tilde{\theta}_0) \\
&= 2\pi - 6\delta + 4\delta\cos\left(\frac{\tilde{\theta}_0 + \tilde{\theta}_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0}{2}\right) \\
&\leqslant 2\pi - 6\delta + 4\delta\left|\cos\left(\frac{2\pi - 6\delta}{2}\right)\right| = 2\pi - 6\delta + 4\delta|\cos(3\delta)| \\
&< 2\pi - 6\delta + 4\delta|\cos(3\delta)| + 2\delta\cos(2\delta).
\end{aligned}$$

Jeśli $0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{5}$ to $|\cos(3\delta)| \leqslant \cos(2\delta)$, skąd

$$\begin{aligned}
2\pi|F(0)| &< 2\pi - 6\delta + 4\delta\cos(2\delta) + 2\delta\cos(2\delta) = 2\pi - 6\delta + 6\delta\cos(2\delta) \\
&= 2\pi - 6\delta(1 - \cos(2\delta)) = 2\pi - 12\delta\sin^2(\delta) < 2\pi - 8\delta\sin^2(\delta).
\end{aligned}$$

Jeśli zaś $\frac{\pi}{5} < \delta < \frac{\pi}{4}$ to $|\cos(3\delta)| = -\cos(3\delta)$ i w konsekwencji

$$\begin{aligned}
2\pi|F(0)| &< 2\pi - 6\delta - 4\delta\cos(3\delta) + 2\delta\cos(2\delta) = 2\pi - 2\delta[3 + 2\cos(3\delta) - \cos(2\delta)] \\
&= 2\pi - 2\delta[3 - 2\cos(\delta) + 2(\cos(3\delta) + \cos(\delta)) - \cos(2\delta)] \\
&= 2\pi - 2\delta[3 - 2\cos(\delta) + 4\cos(2\delta)\cos(\delta) - \cos(2\delta)] \\
&= 2\pi - 2\delta[3 - 2\cos(\delta) + \cos(2\delta)(4\cos(\delta) - 1)] < 2\pi - 2\delta(3 - 2\cos(\delta)) \\
&= 2\pi - 2\delta\left(1 + 4\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Pozostaje rozważyć drugą możliwość (3.95). Wtedy mają zastosowania rozważania z przypadku, gdy $\overline{\overline{A}} = 2$. Reasumując, stwierdzamy, że równości w (3.88) lub (3.84) nie zachodzą.

Załóżmy na koniec, że $\overline{\overline{A}} = 4$. Wtedy $\tilde{\theta}_0 \leqslant 0 < \tilde{\theta}_1$ i $\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1} = 2\delta = \frac{\pi}{2}$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,4}$, i w konsekwencji $\frac{k-1}{2}\pi < \tilde{\theta}_k \leqslant \frac{k}{2}\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,4}$. Stąd na mocy (3.93) dostajemy

$$\begin{aligned}
2\pi|F(0)| &\leqslant \tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0 + \sum_{k=2}^{4} \max(\{\cos(\tilde{\theta}_k), \cos(\tilde{\theta}_{k-1}), 0\})(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}) \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{4} \max(\{\cos(\tilde{\theta}_k), \cos(\tilde{\theta}_{k-1}), 0\}) \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos(\tilde{\theta}_1) + \frac{\pi}{2} \cos(\tilde{\theta}_4) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \Big(\cos(\tilde{\theta}_0) + \cos(\tilde{\theta}_1)\Big) \\
&= \frac{\pi}{2} + \pi \cos\left(\frac{\tilde{\theta}_0 + \tilde{\theta}_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_0}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \cos\left(\tilde{\theta}_0 + \frac{\pi}{4}\right) \\
&\leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{2},
\end{aligned}$$

przy czym równość zachodzi, gdy $\tilde{\theta}_1 = -\tilde{\theta}_0 = \delta = \frac{\pi}{4}$.

Z powyższych trzech przypadków wynika, że równość w (3.88) nie zachodzi dla jakichkolwiek $z \in \mathbb{D}$ i $\delta \in \left(0; \frac{\pi}{5}\right]$, co dowodzi nierówności ostrej (3.83). Natomiast równość w (3.84) zachodzi wyłącznie wtedy, gdy $z = 0$, $\delta = \frac{\pi}{4}$ oraz istnieją $u \in \mathbb{T}$, $\tilde{\theta} \in \mathcal{P}_4$ i permutacja obrotowa σ zbioru $\mathbb{Z}_{1,4}$ spełniające warunki: $\tilde{\theta}_1 = -\tilde{\theta}_0 = \delta$ i $\overline{u}T_{\sigma(k)} = \mathrm{T}_k(\tilde{\theta})$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,4}$. Warunek $\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1} = 2\delta = \frac{\pi}{2}$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,4}$ łącznie z $\tilde{\theta}_1 = -\tilde{\theta}_0 = \delta = \frac{\pi}{4}$ implikuje $\tilde{\theta}_2 = \frac{3\pi}{4}$ oraz $\tilde{\theta}_3 = \frac{5\pi}{4}$. Ponieważ $\overline{u}c_{\sigma(k)} \in \mathrm{D}_k(\tilde{\theta})$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,4}$, więc na mocy warunku (iii) twierdzenia 3.1 dostajemy

$$\overline{u}c_{\sigma(1)} = 1, \quad \overline{u}c_{\sigma(2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\theta}_1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \quad \overline{u}c_{\sigma(3)} = 0, \quad \overline{u}c_{\sigma(4)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\theta}_0} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

W konsekwencji

$$c_{\sigma(1)} = u, \quad c_{\sigma(2)} = u\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \quad c_{\sigma(3)} = 0, \quad c_{\sigma(4)} = u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

To łącznie z warunkiem (i) twierdzenia 3.1 prowadzi na mocy lematu 2.8 do funkcji ekstremalnej postaci

$$\begin{aligned}
F = \mathrm{P}[f] &= \mathrm{P}\Big[\sum_{k=1}^{4} f \cdot \chi_{T_k}\Big] = \sum_{k=1}^{4} \mathrm{P}[f \cdot \chi_{T_k}] = \sum_{k=1}^{4} \mathrm{P}[c_k \chi_{T_k}] = \sum_{k=1}^{4} c_{\sigma(k)} \mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(k)}}] \\
&= \sum_{k=1}^{4} c_k \mathrm{P}[\chi_{T_k}] = u\Big(\mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(1)}}] + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(2)}}] + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(4)}}]\Big),
\end{aligned} \tag{3.97}$$

gdyż c_k jest punktem mocno ekstremalnym sektora $D_k := \mathrm{D}_k(\theta)$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,4}$. Ponieważ $F \in \mathcal{F}_\theta$, więc $u \in T_{\sigma(1)}$, $u\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \in T_{\sigma(2)}$ i $u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \in T_{\sigma(4)}$. Ponadto $|T_{\sigma(1)}|_1 = \frac{\pi}{2}$. Jeśli u nie

jest środkiem łuku $T_{\sigma(1)}$ to $u\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \in T_{\sigma(1)} \setminus T_{\sigma(2)}$ albo $u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \in T_{\sigma(1)} \setminus T_{\sigma(4)}$, co jest niemożliwe. Dlatego u jest środkiem łuku $T_{\sigma(1)}$. To łącznie z (3.97) implikuje równość (3.85) twierdzenia.

Na odwrót, załóżmy, że $\delta = \frac{\pi}{4}$, $z = 0$ i istnieje permutacja obrotowa σ zbioru $\mathbb{Z}_{1,4}$ taka, że zachodzi równość (3.85), gdzie u jest środkiem łuku $T_{\sigma(1)}$. Wtedy $\mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(k)}}](0) = \frac{1}{4}$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,4}$, co wobec równości $|u| = 1$ daje

$$|F(0)| = \left|\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right| = \frac{1+\sqrt{2}}{4}.$$

Ponieważ prawa strona oszacowania (3.84) jest równa $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$, gdy $z = 0$ i $\delta = \frac{\pi}{4}$, więc funkcja F postaci (3.85) spełnia równość w (3.84) dla takich z i δ. Obie implikacje dają łącznie równoważność, co kończy dowód. □

Uwaga 3.22. Funkcję F w równości (3.85) można wyrazić w sposób jawny korzystając z uwagi 2.3. Ponieważ $\delta = \frac{\pi}{4}$ oraz $-\bar{u}\cdot u = -1$, więc przyjmując $a := \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4}$ i korzystając z zależności (2.2) dostajemy dla każdego $z \in \mathbb{D}$ równości

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(1)}}](z) &= \mathrm{P}[\chi_{-\bar{u}T_{\sigma(1)}}](-\bar{u}z) = \mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](-\bar{u}z);\\
\mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(2)}}](z) &= \mathrm{P}[\chi_{-a^{-2}\bar{u}T_{\sigma(2)}}](-a^{-2}\bar{u}z) = \mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](-a^{-2}\bar{u}z);\\
\mathrm{P}[\chi_{T_{\sigma(4)}}](z) &= \mathrm{P}[\chi_{-a^{2}\bar{u}T_{\sigma(4)}}](-a^{2}\bar{u}z) = \mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](-a^{2}\bar{u}z),
\end{aligned}$$

gdzie u jest środkiem łuku $T_{\sigma(1)}$. Stąd na mocy równości (3.85) stwierdzamy, że dla każdego $z \in \mathbb{D}$,

$$F(z) = u\sum_{k=-1}^{1} a^{-k}\,\mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](-a^{2k}\bar{u}z).$$

Korzystając z uwagi 2.3 możemy każdą z funkcji (3.85) wyrazić w postaci

$$F(z) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} - \frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}\sum_{k=-1}^{1}\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}k/4}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}(1+|z|^2) - 4\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi k/2-\tau)}z\right)}{\sqrt{2}(1-|z|^2)}\right)$$

dla $z \in \mathbb{D}$ i $\tau \in \{(\theta_k + \theta_{k-1})/2 : k \in \mathbb{Z}_{1,4}\}$.

Uwaga 3.23. Załóżmy, że $\theta \in \mathcal{P}_4$ odpowiada partycji złożonej z czterech łuków o jednakowej długości, czyli $\theta_k - \theta_{k-1} = \frac{\pi}{2}$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,4}$. Wtedy $\delta_\theta = \frac{\pi}{4}$, i na mocy wniosku 3.20, $\rho_4\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2}$. Korzystając z wniosku 3.3 otrzymujemy

$$|F(z)| \leqslant 1 - \frac{3-\sqrt{2}}{\pi}\left(2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2|z|+\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4}\right), \quad F \in \mathcal{F}_\theta,\ z \in \mathbb{D}. \tag{3.98}$$

Co więcej, równość w (3.98) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $z = 0$. W szczególności,

$$|F(0)| \leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{4}, \quad F \in \mathcal{F}_\theta,\ z \in \mathbb{D}.$$

Rozdział 4

Dyfeomorfizmy harmoniczne koła jednostkowego na siebie z klasyczną normalizacją brzegową

Rozdział ten poświęcony jest zastosowaniom wyników otrzymanych w rozdziale trzecim do badania własności geometrycznych dyfeomorfizmów harmonicznych koła jednostkowego na siebie, unormowanych na brzegu w następujący sposób. Dla dowolnego $\theta \in \mathcal{P}_n$, niech $\mathcal{H}_\theta$ oznacza klasę wszystkich różnowartościowych odwzorowań harmonicznych F koła $\mathbb{D}$ na siebie, spełniających klasyczną normalizację brzegową

$$\lim_{\mathbb{D}\ni z\to e_k} F(z) = e_k, \quad k \in \mathbb{Z}_{1,n}, \tag{4.1}$$

gdzie $e_k := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$ dla $k \in \mathbb{Z}_{0,n}$. Z twierdzenia Lewy'ego wynika, że $\mathrm{J}[F](z) \neq 0$ dla $F \in \mathcal{H}_\theta$ i $z \in \mathbb{D}$, a więc każde odwzorowanie $F \in \mathcal{H}_\theta$ jest dyfeomorfizmem koła $\mathbb{D}$ na siebie; por. [14].

4.1 Nierówności typu Schwarza

Przypomnijmy, że obiekt f nazywamy *słabym homeomorfizmem okręgu* $\mathbb{T}$ *na siebie* $:\Leftrightarrow$ $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ jest funkcją ciągłą i przeciwobraz $f^{-1}(\{u\})$ jest łukiem dla każdego $u \in \mathbb{T}$. Następujące dwa klasyczne twierdzenia odgrywają kluczową rolę w badaniu dyfeomorfizmów harmonicznych koła jednostkowego na siebie.

Twierdzenie 4.1 (Radó-Kneser-Choquet [6, Sec. 3.2])**.** *Jeśli f jest słabym homeomorfizmem okręgu $\mathbb{T}$ na siebie, to* $\mathrm{P}[f]$ *jest różnowartościowym odwzorowaniem harmonicznym koła $\mathbb{D}$ na siebie.*

Twierdzenie 4.2 (Deny-Choquet [4], [6, Sec. 3.3]). *Jeśli F jest różnowartościowym odwzorowaniem harmonicznym koła $\mathbb{D}$ na siebie, to odwzorowanie F ma ciągłe rozszerzenie $\tilde{F}$ na koło domknięte* $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ *i $\tilde{F}|_{\mathbb{T}}$ jest słabym homeomorfizmem okręgu $\mathbb{T}$ na siebie.*

Kluczową w dalszym ciągu rozważań zależność pomiędzy klasami $\mathcal{F}_\theta$ i $\mathcal{H}_\theta$ przedstawia następujący lemat, który jest uogólnieniem wniosku [17, Corollary 2.4] na przypadek n łuków o dowolnej długości dla $n \in \mathbb{Z}_3$.

Lemat 4.3. *Dla dowolnego $\theta \in \mathcal{P}_n$ zachodzi inkluzja*

$$\mathcal{H}_\theta \subset \mathcal{F}_\theta. \tag{4.2}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie $\theta \in \mathcal{P}_n$ i $F \in \mathcal{H}_\theta$. Wtedy $F \in \mathrm{Har}(\mathbb{D})$, F jest funkcją różnowartościową w $\mathbb{D}$ oraz $F(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Stąd na mocy twierdzenia 4.2, funkcja $f := \tilde{F}|_{\mathbb{T}}$ przekształca w sposób ciągły okrąg $\mathbb{T}$ na siebie i dla każdego $w \in \mathbb{T}$, $f^{-1}(\{w\})$ jest spójnym podzbiorem $\mathbb{T}$. Zatem $f^{-1}(\{w\})$ jest łukiem domkniętym okręgu $\mathbb{T}$ dla $w \in \mathbb{T}$. Co więcej, z warunku normalizacji brzegowej (4.1) wynika, że

$$f(e_k) = \lim_{r\to 1^-} \mathrm{P}[f](re_k) = \lim_{r\to 1^-} F(re_k) = e_k, \quad k \in \mathbb{Z}_{1,n}. \tag{4.3}$$

Ustalając dowolnie $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$ załóżmy, że $f^{-1}(\{e_j\}) \cap T_k \neq \emptyset$ dla pewnego $j \in \mathbb{Z}_{0,n} \setminus \{k, k-1\}$, gdzie $T_k := \mathrm{T}_k(\theta)$. Ponieważ $e_j \in f^{-1}(\{e_j\})$ i $f^{-1}(\{e_j\})$ jest łukiem domkniętym okręgu $\mathbb{T}$, więc $e_k \in f^{-1}(\{e_j\})$ lub $e_{k-1} \in f^{-1}(\{e_j\})$. Stąd $f(e_k) = e_j$ lub $f(e_{k-1}) = e_j$, co przeczy równości (4.3). Zatem $f^{-1}(\{e_j\}) \cap T_k = \emptyset$, i tym samym $e_j \notin f(T_k)$ dla wszystkich $j \in \mathbb{Z}_{0,n} \setminus \{k, k-1\}$. Co więcej, z ciągłości funkcji f oraz warunku (4.3) wynika, że $f(T_k)$ jest łukiem domkniętym okręgu $\mathbb{T}$ zawierającym punkty e_k oraz e_{k-1}. W konsekwencji, $T_k \subset f(T_k)$. Załóżmy, że $f(T_k) \setminus T_k \neq \emptyset$. Ponieważ

$$f(T_k \setminus f^{-1}(\{e_k, e_{k-1}\})) = f(T_k) \setminus \{e_k, e_{k-1}\} \supset T_k \setminus \{e_k, e_{k-1}\},$$

więc $f(T_k \setminus f^{-1}(\{e_k, e_{k-1}\}))$ nie jest spójnym podzbiorem $\mathbb{T}$. Z drugiej strony zbiór $T_k \setminus f^{-1}(\{e_k, e_{k-1}\})$ jest łukiem otwartym okręgu $\mathbb{T}$, a więc zbiór $f(T_k \setminus f^{-1}(\{e_k, e_{k-1}\}))$ musi być spójny. Uzyskana sprzeczność oznacza, że $f(T_k) \subset T_k$, i w konsekwencji $f(T_k) = T_k$. Ponieważ $\tilde{F}$ jest ciągłym rozszerzeniem odwzorowania F na koło domknięte $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$, więc

$$F^{**}(z) = \{\tilde{F}(z)\} = \{f(z)\} \subset T_k = \mathrm{T}_k(\theta) \subset \mathrm{D}_k(\theta), \quad z \in T_k.$$

Stąd wobec dowolności wyboru $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$ stwierdzamy na mocy definicji 1.2 oraz wzorów (1.10) i (1.11), że $F \in \mathcal{F}_\theta$, co kończy dowód. □

Twierdzenie 4.4. *Dla dowolnych* $\theta \in \mathcal{P}_n$ *i* $F \in \mathcal{H}_\theta$,

$$|F(z)| < 1 - \frac{1}{\pi}(n - \rho_n(\delta))\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{|z| + \cos(\delta)}\right) - \delta\right), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{4.4}$$

gdzie $\delta := \delta_\theta$.

Dowód. Ustalmy dowolnie $\theta \in \mathcal{P}_n$. Z lematu 4.3 i wniosku 3.3 natychmiast wynika, że zachodzą nierówności (3.23). Załóżmy, że istnieje odwzorowanie $F \in \mathcal{H}_\theta$ spełniające równość

$$|F(z)| = 1 - \frac{1}{\pi}(n - \rho_n(\delta))\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{|z| + \cos(\delta)}\right) - \delta\right) \tag{4.5}$$

dla pewnego $z \in \mathbb{D}$. Stosując twierdzenie 3.1 i wniosek 2.5 wyprowadzamy z nierówności (3.1) i (2.12) nierówności

$$|F(z)| \leqslant 1 - (n - S) \cdot p(z) \leqslant 1 - (n - S) \cdot \mathrm{P}[\chi_{I_\delta}](|z|). \tag{4.6}$$

To łącznie z (4.5) implikuje $\rho_n(\delta) \leqslant S$. Z drugiej strony na mocy lematu 3.2, $S \leqslant \rho_n(\delta)$. Dlatego $S = \rho_n(\delta)$. Ta równość łącznie z (4.5) i (4.6) oznacza równość w (3.1). Z lematu 4.3 wynika, że $F \in \mathcal{F}_\theta$. Stosując ponownie twierdzenie 3.1 widzimy, że istnieją $u \in \mathbb{T}$, funkcja mierzalna $f : \mathbb{T} \to \mathrm{cl}(\mathbb{D})$ i ciąg $\mathbb{Z}_{1,n} \ni k \mapsto c_k \in \mathrm{fr}(D_k)$ spełniające warunki (i)–(v) twierdzenia 3.1. Z warunku (iv) twierdzenia 3.1 wynika, że

$$(1 - \mathrm{Re}(\overline{u}c_k))(p_k(z) - p(z)) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_{1,n}. \tag{4.7}$$

Załóżmy, że $\mathrm{Re}(\overline{u}c_k) = 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Wtedy $c_k = u \in \mathbb{T} \cap \mathrm{fr}(D_k) = T_k$. Z warunku (i) twierdzenia 3.1 wynika, że $f(T_k) \subset D_k$ i

$$c_k \, \mathrm{P}[\chi_{T_k}](z) = c_k p_k(z) = \mathrm{P}[f \cdot \chi_{T_k}](z).$$

Ponieważ c_k jest punktem mocno ekstremalnym zbioru wypukłego D_k, więc na mocy lematu 2.8, $f(w) = c_k$ dla p.w. $w \in T_k$. Na podstawie definicji klasy $\mathcal{H}_\theta$, F jest różnowartościowym odwzorowaniem harmonicznym koła $\mathbb{D}$ na siebie. Z twierdzenia 4.2 wynika więc, że odwzorowanie F ma ciągłe rozszerzenie $\tilde{F}$ na $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ i $\tilde{f} := \tilde{F}|_\mathbb{T}$ jest słabym homeomorfizmem okręgu $\mathbb{T}$ na siebie. Stąd wynika, że $F = \mathrm{P}[\tilde{f}]$. Z warunku (v) twierdzenia 3.1 wynika zaś, że $F = \mathrm{P}[f]$. Dlatego $f(w) = \tilde{f}(w)$ dla p.w. $w \in \mathbb{T}$, i w konsekwencji $\tilde{f}(T_k) = \{c_k\}$. Z drugiej strony, z warunku (4.1) wynika, że $\tilde{f}(e_k) = e_k$ i $\tilde{f}(e_{k-1}) = e_{k-1}$, skąd $e_k = c_k = e_{k-1}$. Uzyskana sprzeczność oznacza, że $\mathrm{Re}(\overline{u}c_k) < 1$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Z drugiej strony $1 \in \overline{u}D_l$ dla pewnego $l \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Stąd $u \in D_l$. Przyjmując

$v_k := c_k$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n} \setminus \{l\}$ i $v_l := u$ widzimy, że $v_k \in D_k$ dla $k \in \mathbb{Z}_{1,n}$, skąd na mocy wzoru (3.2),

$$\begin{aligned} S &\geqslant \operatorname{Re}\Big(\overline{u}\sum_{k=1}^{n} v_k\Big) = \operatorname{Re}\Big(\overline{u}\sum_{l\neq k=1}^{n} c_k + \overline{u}u\Big) = \operatorname{Re}\Big(\overline{u}\sum_{l\neq k=1}^{n} c_k\Big) + 1 \\ &> \operatorname{Re}\Big(\overline{u}\sum_{l\neq k=1}^{n} c_k\Big) + \operatorname{Re}(\overline{u}c_l) = \operatorname{Re}\Big(\overline{u}\sum_{k=1}^{n} c_k\Big). \end{aligned}$$

To przeczy warunkowi (iii) twierdzenia 3.1.

Zatem nie istnieją $F \in \mathcal{H}_\theta$ i $z \in \mathbb{D}$, dla których zachodzi równość (4.5). To łącznie z (3.23) implikuje oszacowanie (4.4), co kończy dowód. □

Wniosek 4.5. *Dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_3$ i $F \in \mathcal{H}_\theta$,*

$$|F(z)| < 1 - \frac{4}{\pi}\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{|z| + \cos(\delta)}\right) - \delta\right), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{4.8}$$

gdzie $\delta := \delta_\theta$.

Dowód. Z wniosku 3.15 wynika, że $3 - \rho_3(\delta) = 4\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$. Stosując twierdzenie 4.4 z $n := 3$ otrzymujemy oszacowanie (4.8), co kończy dowód. □

Uwaga 4.6. Z wniosku 4.5 wynika, że dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_3$ i $F \in \mathcal{H}_\theta$, jeśli $\delta_\theta = \frac{\pi}{3}$ to oszacowanie wartości $|F(z)|$ redukuje się do wyniku otrzymanego w pracy [17, Corollary 2.4]. Zauważmy, że równość $\delta_\theta = \frac{\pi}{3}$ oznacza, że partycja $\mathbb{Z}_{1,3} \ni k \mapsto \mathrm{T}_k(\theta)$ dzieli okrąg $\mathbb{T}$ na trzy łuki o jednakowej długości.

Wniosek 4.7. *Dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_4$ i $F \in \mathcal{H}_\theta$,*

(i) *jeśli* $0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{5}$ *to*

$$|F(z)| < 1 - \frac{4}{\pi}\sin^2(\delta)\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{|z| + \cos(\delta)}\right) - \delta\right), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{4.9}$$

(ii) *jeśli* $\frac{\pi}{5} \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{4}$ *to*

$$|F(z)| < 1 - \frac{1}{\pi}\left(1 + 4\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{|z| + \cos(\delta)}\right) - \delta\right), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{4.10}$$

gdzie $\delta := \delta_\theta$.

Dowód. Na mocy wniosku 3.20 mamy $4 - \rho_4(\delta) = 4\sin^2(\delta)$, gdy $0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{5}$, oraz $4 - \rho_4(\delta) = 1 + 4\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$, gdy $\frac{\pi}{5} \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{4}$. Stosując twierdzenie 4.4 z $n := 4$ otrzymujemy oszacowania (4.9) i (4.10), co kończy dowód. □

Uwaga 4.8. Z wniosku 4.7 wynika, że dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_4$ i $F \in \mathcal{H}_\theta$, jeśli $\delta_\theta = \frac{\pi}{4}$ to

$$|F(z)| < 1 - \frac{3-\sqrt{2}}{\pi}\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2|z|+\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4}\right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Zauważmy, że równość $\delta_\theta = \frac{\pi}{4}$ oznacza, że partycja $\mathbb{Z}_{1,4} \ni k \mapsto \mathrm{T}_k(\theta)$ dzieli okrąg $\mathbb{T}$ na cztery łuki o jednakowej długości.

4.2 Nierówność Heinza

Niech $\mathrm{Hom}^+(\mathbb{T})$ oznacza klasę wszystkich zachowujących orientację homeomorfizmów okręgu jednostkowego $\mathbb{T}$ na siebie. Dla $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{T})$ i $z \in \mathbb{T}$ definiujemy pochodną

$$f'(z) := \lim_{u \to z} \frac{f(u) - f(z)}{u - z},$$

gdy granica istnieje, zaś $f'(z) := 0$ w przeciwnym przypadku. Przypomnijmy, że operatory pochodnych formalnych ∂ oraz $\bar{\partial}$ są zdefiniowane wzorami (1.2). Z lematu [15, Lemma 2.1] wynika, że dla każdej funkcji $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{T})$ i p.w. $z \in \mathbb{T}$ funkcje $\partial\,\mathrm{P}[f]$ i $\bar{\partial}\,\mathrm{P}[f]$ mają granice radialne w punkcie z oraz zachodzą równości

$$(4.11)\qquad \begin{aligned} 2z \lim_{r\to 1^-} \partial\,\mathrm{P}[f](rz) &= \lim_{r\to 1^-}\left[\frac{f(z) - \mathrm{P}[f](rz)}{1-r} + zf'(z)\right] \\ 2\bar{z} \lim_{r\to 1^-} \bar{\partial}\,\mathrm{P}[f](rz) &= \lim_{r\to 1^-}\left[\frac{f(z) - \mathrm{P}[f](rz)}{1-r} - zf'(z)\right]. \end{aligned}$$

Twierdzenie 4.9. *Dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_n$ i $F \in \mathcal{H}_\theta$ zachodzą nierówności*

$$(4.12)\qquad |\partial F(z)| \geqslant \frac{1}{2\pi}\,(n - \rho_n(\delta))\operatorname{tg}\left(\frac{\delta}{2}\right), \quad z \in \mathbb{D},$$

oraz

$$(4.13)\qquad |\partial_x F(z)|^2 + |\partial_y F(z)|^2 \geqslant \frac{1}{2\pi^2}\,(n - \rho_n(\delta))^2\operatorname{tg}^2\left(\frac{\delta}{2}\right), \quad z \in \mathbb{D},$$

gdzie $\delta := \delta_\theta$.

Dowód. Ustalmy dowolnie $\theta \in \mathcal{P}_n$ i $F \in \mathcal{H}_\theta$. Wtedy F jest różnowartościowym odwzorowaniem harmonicznym koła $\mathbb{D}$ na siebie. Z twierdzenia 4.2 wynika zatem, że odwzorowanie F ma ciągłe rozszerzenie $\tilde{F}$ na koło domknięte $\mathrm{cl}(\mathbb{D})$ i $f := \tilde{F}|_{\mathbb{T}}$ jest słabym homeomorfizmem okręgu $\mathbb{T}$ na siebie. Dlatego istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca warunki $\varphi(\theta_0) = \theta_0$ oraz

$$(4.14)\qquad f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jest to klasyczny wynik z topologii algebraicznej dotyczący grupy podstawowej okręgu jednostkowego; por. np. [8, Chap. 1], [11, Chap. 16]. Ponadto φ jest funkcją słabo monotoniczną, gdyż przeciwobraz $f^{-1}(\{u\})$ jest łukiem dla każdego $u \in \mathbb{T}$. Z drugiej strony na mocy warunków (4.1) i (4.14), $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\theta_k)} = e_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$ dla $k \in \mathbb{Z}_{0,n}$. Dlatego φ jest słabo rosnącą funkcją ciągłą spełniającą warunki

$$\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) + 2\pi, \quad t \in \mathbb{R} \ \text{ oraz } \ \varphi(\theta_k) = \theta_k, \quad k \in \mathbb{Z}_{0,n}. \tag{4.15}$$

Załóżmy najpierw, że φ jest funkcją rosnącą, czyli $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{T})$. Ponieważ $F = \mathrm{P}[f]$, więc z równości (4.11) wynika, że granice

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{f(z) - F(rz)}{1-r} \quad \text{oraz} \quad \lim_{r\to 1^-} \mathrm{J}[F](rz)$$

istnieją dla p.w. $z \in \mathbb{T}$ i zachodzą równości

$$2 \lim_{r\to 1^-} (|\partial F(rz)|^2 + |\bar{\partial} F(rz)|^2) = |f'(z)|^2 + \lim_{r\to 1^-} \left| \frac{f(z) - F(rz)}{1-r} \right|^2, \tag{4.16}$$

oraz

$$\lim_{r\to 1^-} (|\partial F(rz)|^2 - |\bar{\partial} F(rz)|^2) = \lim_{r\to 1^-} \mathrm{J}[F](rz). \tag{4.17}$$

Łącząc (4.16) z (4.17) wnioskujemy, że równość

$$\lim_{r\to 1^-} |\partial F(rz)|^2 = \frac{1}{4}|f'(z)|^2 + \frac{1}{4}\lim_{r\to 1^-} \left| \frac{f(z) - F(rz)}{1-r} \right|^2 + \frac{1}{2}\lim_{r\to 1^-} \mathrm{J}[F](rz) \tag{4.18}$$

zachodzi dla p.w. $z \in \mathbb{T}$. Ponieważ $F \in \mathcal{H}_\theta$, więc na mocy twierdzenia 4.4 widzimy, że dla wszystkich $z \in \mathbb{T}$ i $r \in [0; 1)$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z) - F(rz)}{1-r} \right| &\geqslant \frac{|f(z)| - |F(rz)|}{1-r} \\ &> \frac{1 - \left[1 - \frac{1}{\pi}(n - \rho_n(\delta)) \left(2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\delta)}{r + \cos(\delta)}\right) - \delta\right)\right]}{1-r} \\ &\to \frac{1}{\pi}\,(n - \rho_n(\delta)) \operatorname{tg}\left(\frac{\delta}{2}\right), \ \text{ gdy } r \to 1^-. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Z twierdzenia [15, Theorem 2.2] wynika, że

$$\lim_{r\to 1^-} \mathrm{J}[F](rz) \geqslant 0 \quad \text{dla p.w. } z \in \mathbb{T}.$$

To łącznie z (4.18) i (4.19) daje

$$\lim_{r\to 1^-} |\partial F(rz)| \geqslant \frac{1}{2\pi}(n - \rho_n(\delta)) \operatorname{tg}\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad \text{dla p.w. } z \in \mathbb{T}.$$

Z drugiej strony na mocy lematu [16, Lemma 0.3],

$$|\partial F(z)| \geqslant \operatorname*{ess\,inf}_{z\in\mathbb{T}} \Big| \lim_{r\to 1^-} \partial F(rz) \Big|, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Obie te nierówności implikują oszacowanie (4.12), o ile φ jest funkcją rosnącą. Pozostaje rozważyć sytuację, gdy φ nie jest funkcją rosnącą. Wtedy φ jest funkcją słabo rosnącą, i dla każdego $l \in \mathbb{N}$ funkcja

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \varphi_l(t) := \tfrac{1}{l}t + \tfrac{l-1}{l}\varphi(t)$$

jest rosnącym homeomorfizmem prostej $\mathbb{R}$ na siebie, który na mocy (4.15) spełnia warunki $\varphi_l(t+2\pi) = \varphi_l(t) + 2\pi$ dla $t \in \mathbb{R}$ oraz $\varphi_l(\theta_k) = \theta_k$ dla $k \in \mathbb{Z}_{0,n}$. Zatem $f_l \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{T})$ dla $l \in \mathbb{N}$, gdzie $f_l : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ jest funkcją jednoznacznie wyznaczoną przez warunek

$$f_l(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_l(t)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Stąd na mocy twierdzenia 4.1, $F_l := \mathrm{P}[f_l] \in \mathcal{H}_\theta$ dla $l \in \mathbb{N}$. Ponieważ

$$\sup\{|f_l(z) - f(z)| : z \in \mathbb{T}\} \to 0, \text{ gdy } l \to +\infty,$$

więc stosując twierdzenie Lebesgue'a o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki wnioskujemy z (1.4), że $\partial\,\mathrm{P}[f_l](z) \to \partial\,\mathrm{P}[f](z)$, gdy $l \to +\infty$. Ponieważ $f_l \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{T})$ dla $l \in \mathbb{N}$, więc z przeprowadzonego do tej pory dowodu wynika, że

$$|\partial F_l(z)| \geqslant \frac{1}{2\pi}\left(n - \rho_n(\delta)\right) \operatorname{tg}\Big(\frac{\delta}{2}\Big), \quad l \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{D}.$$

Przechodząc do granicy z $l \to \infty$ otrzymujemy w konsekwencji oszacowanie (4.12) w każdym przypadku. Stosując wzory (1.2) dostajemy

$$|\partial_x F(z)|^2 + |\partial_y F(z)|^2 = 2(|\partial F(z)|^2 + |\bar\partial F(z)|^2), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Stąd i z (4.12) wyprowadzamy oszacowanie (4.13), co kończy dowód. □

Wniosek 4.10. *Dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_3$ i $F \in \mathcal{H}_\theta$ zachodzą nierówności*

$$|\partial F(z)| \geqslant \frac{2}{\pi}\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\delta}{2}\right), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{4.20}$$

oraz

$$|\partial_x F(z)|^2 + |\partial_y F(z)|^2 \geqslant \frac{8}{\pi^2}\sin^4\left(\frac{\delta}{2}\right)\operatorname{tg}^2\left(\frac{\delta}{2}\right), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{4.21}$$

gdzie $\delta := \delta_\theta$.

Dowód. Z wniosku 3.15 wynika, że $3 - \rho_3(\delta) = 4\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$. Stosując twierdzenie 4.9 z $n := 3$ otrzymujemy oszacowania (4.20) i (4.21), co kończy dowód. □

Uwaga 4.11. Z wniosku 4.10 wynika w szczególności, że dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_3$ i $F \in \mathcal{H}_\theta$, jeśli $\delta_\theta = \frac{\pi}{3}$ to

$$|\partial F(z)| \geqslant \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

oraz

$$|\partial_x F(z)|^2 + |\partial_y F(z)|^2 \geqslant \frac{1}{6\pi^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Wniosek 4.12. *Dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_4$ i $F \in \mathcal{H}_\theta$, jeśli $0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{5}$ to*

$$|\partial F(z)| \geqslant \frac{2}{\pi}\sin^2(\delta)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\delta}{2}\right), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{4.22}$$

oraz

$$|\partial_x F(z)|^2 + |\partial_y F(z)|^2 \geqslant \frac{8}{\pi^2}\sin^4(\delta)\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\delta}{2}\right), \quad z \in \mathbb{D}; \tag{4.23}$$

jeśli zaś $\frac{\pi}{5} \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{4}$ to

$$|\partial F(z)| \geqslant \frac{1}{2\pi}\left(1 + 4\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\delta}{2}\right), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{4.24}$$

oraz

$$|\partial_x F(z)|^2 + |\partial_y F(z)|^2 \geqslant \frac{1}{2\pi^2}\left(1 + 4\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^2\mathrm{tg}^2\left(\frac{\delta}{2}\right), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{4.25}$$

gdzie $\delta := \delta_\theta$.

Dowód. Z wniosku 3.20 wynika, że $4 - \rho_4(\delta) = 4\sin^2(\delta)$, gdy $0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{5}$, oraz $4 - \rho_4(\delta) = 1 + 4\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$, gdy $\frac{\pi}{5} \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{4}$. Stosując twierdzenie 4.9 z $n := 4$ otrzymujemy oszacowania (4.22)–(4.25), co kończy dowód. □

Uwaga 4.13. Z wniosku 4.12 wynika w szczególności, że dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_4$ i $F \in \mathcal{H}_\theta$, jeśli $\delta_\theta = \frac{\pi}{4}$ to

$$|\partial F(z)|^2 \geqslant \frac{1}{4\pi^2}(57 - 40\sqrt{2}), \quad z \in \mathbb{D},$$

oraz

$$|\partial_x F(z)|^2 + |\partial_y F(z)|^2 \geqslant \frac{1}{2\pi^2}(57 - 40\sqrt{2}), \quad z \in \mathbb{D}.$$

4.3 Dolne ograniczenia typu Lipschitza

Korzystając z analitycznej charakteryzacji odwzorowań quasikonforemnych płaszczyzny zespolonej z podrozdziału 1.1 można zauważyć, że dla każdego $K \in [1;+\infty)$ zachowujący orientację dyfeomorfizm F w obszarze Ω jest odwzorowaniem K-quasikonforemnym w Ω wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\bar{\partial}F(z)| \leqslant \frac{K-1}{K+1}|\partial F(z)|, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4.26}$$

W szczególności F jest odwzorowaniem 1-quasikonforemnym wtedy i tylko wtedy, gdy F jest odwzorowaniem konforemnym.

Twierdzenie 4.14. *Dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_n$, $F \in \mathcal{H}_\theta$ i $K \in [1;+\infty)$, jeśli F jest odwzorowaniem K-quasikonforemnym to*

$$|F(z)-F(w)| \geqslant \frac{n-\rho_n(\delta)}{(K+1)\pi}\operatorname{tg}\Big(\frac{\delta}{2}\Big)|z-w|, \quad z,w \in \mathbb{D}, \tag{4.27}$$

gdzie $\delta := \delta_\theta$.

Dowód. Przy założeniach twierdzenia ustalmy dowolnie $z, w \in \mathbb{D}$. Przyjmując $[0;1] \ni t \mapsto \gamma(t) := F^{-1}(z+t(w-z))$, mamy

$$\begin{aligned}|z-w| &= \int_0^1 \Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\gamma(t))\Big|\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big|\partial F(\gamma(t))\gamma'(t) + \bar{\partial}F(\gamma(t))\overline{\gamma'(t)}\Big|\mathrm{d}t \\ &\geqslant \int_0^1 \Big(|\partial F(\gamma(t))||\gamma'(t)| - |\bar{\partial}F(\gamma(t))||\overline{\gamma'(t)}|\Big)\mathrm{d}t \\ &\geqslant \inf_{u\in\mathbb{D}}\Big(|\partial F(u)| - |\bar{\partial}F(u)|\Big)\int_0^1 |\gamma'(t)|\mathrm{d}t \\ &\geqslant \frac{2}{K+1}\inf_{u\in\mathbb{D}}|\partial F(u)||F^{-1}(z)-F^{-1}(w)|.\end{aligned}$$

Ostatnia z tych nierówności jest konsekwencją nierówności (4.26). Stosując teraz oszacowanie (4.12) otrzymujemy

$$|z-w| \geqslant \frac{n-\rho_n(\delta)}{(K+1)\pi}\operatorname{tg}\Big(\frac{\delta}{2}\Big)|F^{-1}(z)-F^{-1}(w)|, \quad z,w \in \mathbb{D},$$

gdyż $F(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. To implikuje oszacowanie (4.27), co kończy dowód. □

Wniosek 4.15. *Dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_3$, $F \in \mathcal{H}_\theta$ i $K \in [1;+\infty)$, jeśli F jest odwzorowaniem K-quasikonforemnym to*

$$|F(z)-F(w)| \geqslant \frac{4}{(K+1)\pi}\sin^2\Big(\frac{\delta}{2}\Big)\operatorname{tg}\Big(\frac{\delta}{2}\Big)|z-w|, \quad z,w \in \mathbb{D}, \tag{4.28}$$

gdzie $\delta := \delta_\theta$.

Dowód. Z wniosku 3.15 wynika, że $3 - \rho_3(\delta) = 4\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$. Stosując twierdzenie 4.14 z $n := 3$ otrzymujemy oszacowanie (4.28), co kończy dowód. □

Uwaga 4.16. Z wniosku 4.15 wynika w szczególności, że dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_3$, $F \in \mathcal{H}_\theta$ i $K \in [1; +\infty)$, jeśli F jest odwzorowaniem K-quasikonforemnym i $\delta_\theta = \frac{\pi}{3}$ to

$$|F(z) - F(w)| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3(K+1)\pi}|z - w|, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Wniosek 4.17. *Dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_4$, $F \in \mathcal{H}_\theta$ i $K \in [1; +\infty)$, jeśli F jest odwzorowaniem K-quasikonforemnym to zachodzą implikacje:*

(i) *jeśli* $0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{5}$ *to*

$$|F(z) - F(w)| \geqslant \frac{4}{(K+1)\pi}\sin^2(\delta)\operatorname{tg}\left(\frac{\delta}{2}\right)|z - w|, \quad z, w \in \mathbb{D}, \tag{4.29}$$

(ii) *jeśli* $\frac{\pi}{5} \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{4}$ *to*

$$|F(z) - F(w)| \geqslant \frac{1}{(K+1)\pi}\left(1 + 4\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\delta}{2}\right)|z - w|, \quad z, w \in \mathbb{D}, \tag{4.30}$$

gdzie $\delta := \delta_\theta$.

Dowód. Na mocy wniosku 3.20 dostajemy $4 - \rho_4(\delta) = 4\sin^2(\delta)$, gdy $0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{5}$, oraz $4 - \rho_4(\delta) = 1 + 4\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$, gdy $\frac{\pi}{5} \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{4}$. Stosując twierdzenie 4.14 z $n := 4$ otrzymujemy oszacowania (4.29) i (4.30), co kończy dowód. □

Uwaga 4.18. Z wniosku 4.17 wynika w szczególności, że dla dowolnych $\theta \in \mathcal{P}_4$, $F \in \mathcal{H}_\theta$ i $K \in [1; +\infty)$, jeśli F jest odwzorowaniem K-quasikonforemnym i $\delta_\theta = \frac{\pi}{4}$ to

$$|F(z) - F(w)| \geqslant \frac{4\sqrt{2} - 5}{(K+1)\pi}|z - w|, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Bibliografia

[1] L. V. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, D. Van Nostrand, Princeton, New Jersey-Toronto-New York-London, 1966.

[2] ———, *Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.

[3] S. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, 2 ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 137, Springer-Verlag New York, 2001.

[4] G. Choquet, *Sur les homéomorphies harmoniques d'un disque D sur D*, Complex Variables **24** (1993), 47–48.

[5] P. Duren, *Theory of H^p-Spaces*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2000.

[6] ———, *Harmonic Mappings in the Plane*, Cambridge Tracts in Mathematics 156, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[7] A. Futa and D. Partyka, *The Schwarz type inequality for harmonic functions of the unit disc satisfying a sectorial condition*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź **68** (2018), no. 2, 97–109, Série: Recherches sur les déformations.

[8] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press., Cambridge, 2002.

[9] E. Heinz, *On one-to-one harmonic mappings*, Pacific J. Math. **9** (1959), 101–105.

[10] J. Hersch and A. Pfluger, *Généralisation du lemme de Schwarz et du principe de la mesure harmonique pour les fonctions pseudo-analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris. **234** (1952), 43–45.

[11] C. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[12] S. G. Krantz, *The Theory and Practice of Conformal Geometry*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2016.

[13] O. Lehto and K. I. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, 2nd ed., Grundlehren 126, Springer, Berlin, 1973.

[14] H. Lewy, *On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (1936), 689–692.

[15] D. Partyka and K. Sakan, *Quasiconformality of harmonic extensions*, J. of Comp. and Appl. Math. **105** (1999), 425–436.

[16] ——— , *On Heinz's inequality*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź **52** (2002), 27–34, Série: Recherches sur les déformations **36**.

[17] D. Partyka and J. Zając, *The Schwarz type inequality for harmonic mappings of the unit disc with boundary normalization*, Complex Anal. Oper. Theory **9** (2015), 213–228.

[18] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, third ed., McGraw-Hill International Editions, Mathematics Series, McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1987.